※興味がある人のための自習資料です。授業配布資料とあわせて利用してください。

三角関数のラプラス変換の公式の導出

　三角関数のラプラス変換の公式の導出には①部分積分を用いる方法と②オイラーの公式を用いる方法の２つ手順が一般的です。このうち①部分積分を用いる方法に関しては，部分積分法を２回用いる方法がよく紹介されています。この資料では，部分積分を用いる方法について，計算が少なくてすむ計算手順を紹介します。（おそらくこれが最も手軽な導出方法ですが，教科書や Web 上では紹介されていないようなので資料を用意しました。大学生としては②オイラーの公式を用い計算した結果の実部と虚部をする手順の方がよりスマートです。別解２として示しました。）

１．部分積分を用いた導出手順

　まず sin 関数のラプラス変換について考える。

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt$$

　これを部分積分すると

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\sin\omega t\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt$$

$$= -\frac{1}{s}(0 - 1\cdot 0) + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt$$

$$= \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt$$

ここで $\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt = \mathcal{L}[\cos\omega t]$ であるため，$\mathcal{L}[\sin\omega t]$ が $\mathcal{L}[\cos\omega t]$の式で表せる（ということに気づく）。
そこで $I = \mathcal{L}[\sin\omega t]$，　$J = \mathcal{L}[\cos\omega t]$ とすると

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = I = \frac{\omega}{s}J \qquad \cdots(1)$$

と表すことができる。
一方，$\mathcal{L}[\cos\omega t]$についても同様に考えると

$$J = \mathcal{L}[\cos\omega t] = \int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt$$

　これを部分積分すると

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\cos\omega t\right]_0^\infty - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt$$

$$= -\frac{1}{s}(0 - 1 \cdot 1) - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}I \qquad \cdots(2)$$

以上から，(1) 式を(2)式に代入して連立方程式を解く。

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{\omega}{s}J \\ J &= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}I \end{aligned}\right\} \quad \therefore \left\{\begin{aligned} I &= \frac{\omega}{s}J & \ldots(1) \\ J &= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}\cdot\frac{\omega}{s}J & \ldots(2)' \end{aligned}\right.$$

(2)’ を解くと

$$J = \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2}J$$

$$\therefore \left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)J = \frac{1}{s}$$

$$\therefore \frac{s^2+\omega^2}{s^2}J = \frac{1}{s}$$

$$\therefore J = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

となる。これを(1) 式に代入して

$$I = \frac{\omega}{s}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

を得る。
以上から

$$I = \mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad , \quad J = \mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

が得られた。

※[別解]
(1)式の途中で出てくる

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt \qquad \cdots(1)’$$

に対して再度部分積分を適用すると，再度 $\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt$ の形が現れ$\mathcal{L}[\sin\omega t]$の１次方程式が導出できる。これを解き$\mathcal{L}[\sin\omega t]$を求めてもよい。$\mathcal{L}[\cos\omega t]$も同様の手順で部分積分を２回繰り返せば求めることができる。（もちろん，(1)’に$\mathcal{L}[\cos\omega t]$が含まれることに気がついていれば，$\mathcal{L}[\sin\omega t]$の結果を代入しても良い。）

[別解２]
２．オイラーの公式を用いた導出手順

オイラーの公式（とド・モアブルの定理）より

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \qquad (j\text{: 虚数単位})$$

この両辺のラプラス変換を考える。

$$\mathcal{L}\left[e^{j\omega t}\right] = \mathcal{L}[\cos\omega t + j\sin\omega t]$$

この左辺は指数関数のラプラス変換の公式より求まる（導出は第 5 回講義資料を参照）。右辺はラプラス変換の線形則から

$$\frac{1}{s-j\omega} = \mathcal{L}[\cos\omega t] + j\mathcal{L}[\sin\omega t]$$

となる。この両辺の実数，虚数を比較すれば三角関数のラプラス変換の結果を求めることができる。
左辺を実部と虚部に分けるために分子，分母に$s + j\omega$をかけると

$$\text{左辺} = \frac{1}{s-j\omega} = \frac{s+j\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)} = \frac{s+j\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + j\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \mathcal{L}[\cos\omega t] + j\mathcal{L}[\sin\omega t] = \text{右辺}$$

となるので，左右両辺の実部と虚部比較して

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad , \quad \mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

が得られる。

※コメント
オイラーの公式とド・モアブルの定理を知っていることが前提なので手軽とはいえませんが，知っていればこの導出方法が一番スマートです。