ロボット家電と制御 第１１回

様々な応答（２）

２次遅れ要素・ブロック線図・PID制御

山崎 洋一

yamazaki@he.kanagawa-it.ac.jp

復習 各標準形の単位ステップ応答

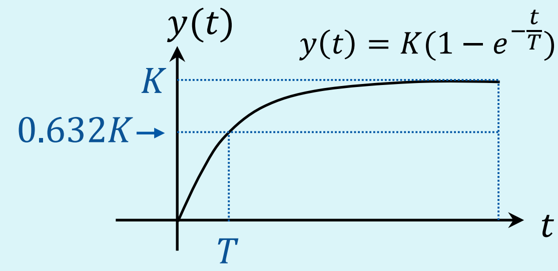
1 次遅れ要素

○ブロック線図

単位ステップ入力 $U(s) = \frac{1}{s}$ → $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$ → 出力 $Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$

○ 時刻 t の関数形式での出力：$y(t)$

$$出力\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,Y(s)\,] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}\right] = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$



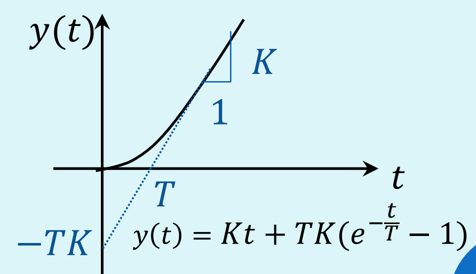
1 次遅れ要素+積分要素

○ブロック線図

単位ステップ入力 $U(s) = \frac{1}{s}$ → $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ → 出力 $Y(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} \cdot \frac{1}{s}$

○ 時刻 t の関数形式での出力：$y(t)$

$$出力\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,Y(s)\,] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s(Ts+1)} \cdot \frac{1}{s}\right] = Kt + TK(e^{-\frac{t}{T}} - 1)$$



（3）　２次遅れ要素：４種類の単位ステップ応答

○ブロック線図

単位ステップ入力

$$U(s) = \frac{1}{s} \;\longrightarrow\; \boxed{G(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}} \;\longrightarrow\; Y(s)$$

K：ゲイン係数

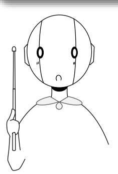
ω_n：固有角振動数，固有角周波数

ζ：減衰比，減衰係数

○ s 関数での出力：$Y(s)$

$$\text{出力 } Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}\cdot\frac{1}{s}$$

Point!



２次遅れ要素の単位ステップ応答は減衰比 ζ の大きさに応じて４種類の形になります。

(1) $\zeta = 0$ のとき　持続振動（減衰しない）

(2) $0 < \zeta < 1$ のとき　**減衰振動**

(3) $\zeta = 1$ のとき　**臨界減衰**

(4) $1 < \zeta$ のとき　**加減衰**（振動しない）

右図で各形状を確認してください。

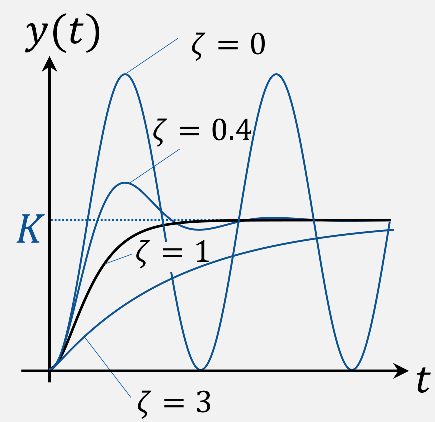


図3．２次遅れ要素の単位ステップ応答

（3） ２次遅れ要素：４種類の単位ステップ応答

○ 時刻 t の関数形式での出力：$y(t)$

(1) $\zeta = 0$ のとき　[持続振動（減衰しない）]

(2) $0 < \zeta < 1$ のとき [減衰振動]

$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(qt + \emptyset)\right\}$$

$$q = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$$ (減衰自由角周波数)，　$\emptyset = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

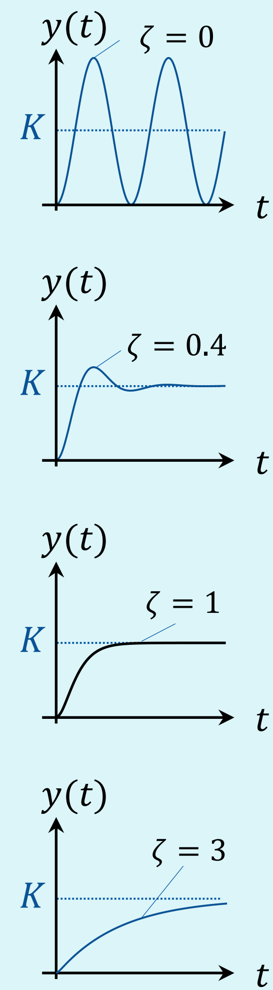
(3) $\zeta = 1$ のとき　[臨界減衰]

$$y(t) = K\{1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)\}$$

(4) $1 < \zeta$ のとき [加減衰（振動しない）]

$$y(t) = K\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\frac{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{q't} - \frac{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-q't}\right)\right\}$$

$$q' = \sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n$$



（3） ２次遅れ要素：減衰振動

Point! **減衰振動の指標**

２次遅れ要素では，とくに

(2) $0 < \zeta < 1$ のとき **減衰振動**

を扱う場合が多いので，次にその指標を示します。

●パラメータ同定に必要な指標

ゲイン定数 $\boldsymbol{K}$ (単位ステップ応答では定常値)

最大行き過ぎ時間 $\boldsymbol{T_{max}}$ (最初のピークまでの時間)

最大ピーク値 $\boldsymbol{y_{max}}$ (最大行き過ぎ時間での出力値)

●即応性に関する指標

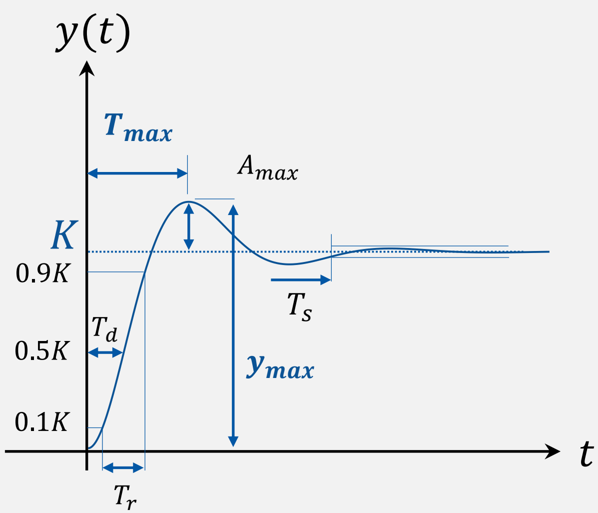
立ち上がり時間 $\boldsymbol{T_r}$ (応答の定常値の10%から90%に至るまでの時間)

遅れ時間 $\boldsymbol{T_d}$ (応答の定常値の50%に達するまでの時間)

●減衰性に関する指標

オーバーシュート量 A_{max} $(= \boldsymbol{y_{max}} - \boldsymbol{K})$

整定時間 $\boldsymbol{T_s}$ (応答が定常値の±5%または±2%に留まるのに要する時間)



図．減衰振動の各指標

（3） ２次遅れ要素：減衰振動のパラメタ同定

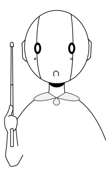
○減衰振動のパラメタ同定

ゲイン定数K ：応答波形から得る

固有角周波数 $\omega_n = \sqrt{\left(\frac{1}{T_{max}}\ln\frac{K}{y_{max}-K}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{T_{max}}\right)^2}$

減衰係数比 $\zeta = \frac{1}{\omega_n T_{max}}\ln\frac{K}{y_{max}-K}$

Point!



減衰振動の応答波形を示す２次遅れ要素に関して，その答波形から伝達関数のパラメータ（ゲインK，固有角周波数ω_n，減衰係数比 ζ）を同定できます。

$0 < \zeta < 1$ の減衰振動では，最大行き過ぎ時間 T_{max}は $y(t)$ を時間微分して0になる時刻なので，

$$T_{max} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}$$

となります。この時の最大ピーク値は次のとおりです。

$$y_{max} = y(T_{max}) = K(1 + e^{-\zeta\omega_n T_{max}})$$ 。

この２式より上記の固有角周波数ω_n，減衰係数比 ζを得ることができます。

（3）２次遅れ要素：減衰振動のパラメタ同定

神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY KAIT

○ブロック線図

単位ステップ入力 $U(s) = \frac{1}{s}$ → $G(s) = \frac{K\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2}$ → 出力 $Y(s) = \frac{K\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2} \cdot \frac{1}{s}$

○ 時刻 t の関数形式での出力：$y(t)$

(2) $0 < \zeta < 1$ のとき [**減衰振動**]　$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(qt + \emptyset)\right\}$

$q = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$ (減衰自由各周波数)，　$\emptyset = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

○パラメタ同定　例題１１　RLC回路の応答

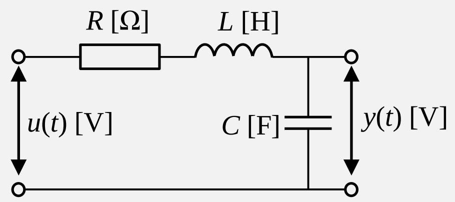
右図で示すRLC回路に単位ステップ電圧を印加したとき，グラフのような時間応答を示した。このときの伝達関数を求めよ。

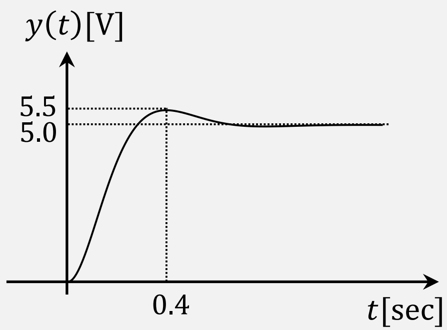
解）グラフより$K = 5.0$，T_{max}=0.4[sec]，$y_{max} = 5.5$[V] なので

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{1}{0.4}\ln\frac{5.0}{5.5-5.0}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{0.4}\right)^2} = 9.738 \text{ [rad/sec]}$$

$$\zeta = \frac{1}{9.738\times 0.4}\ln\frac{5.0}{5.5-5.0} = 0.5912$$

よって $G(s) = \frac{5.0\times 19.48^2}{s^2+2\times 0.5912\times 9.738+9.738^2} = \underline{\underline{\frac{474}{s^2+11.5s+94.8}}}$





図． RLC回路のステップ応答

復習 ブロック線図による表現

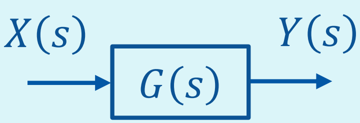
神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
KAIT

- ブロック線図 … 制御系の信号伝達を示すもの

<u>○ブロック線図の基本要素の表現</u>

(1)伝達要素（ブロック）

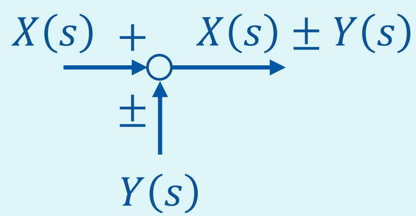
信号を変換



$Y(s) = G(s)X(s)$

(2)加え合わせ点

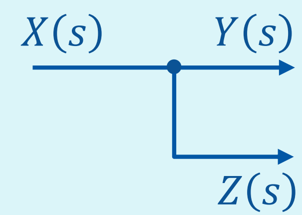
信号を演算（加減算）



$X(s) \pm Y(s)$

(3)引き出し点

信号の分岐

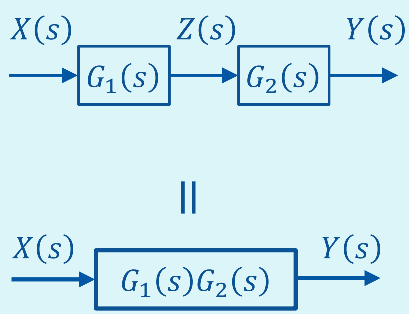


$Y(s) = Z(s) = X(s)$

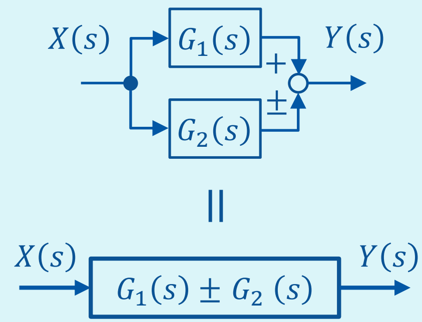
ブロック線図の基本結合

○ブロック線図の基本結合

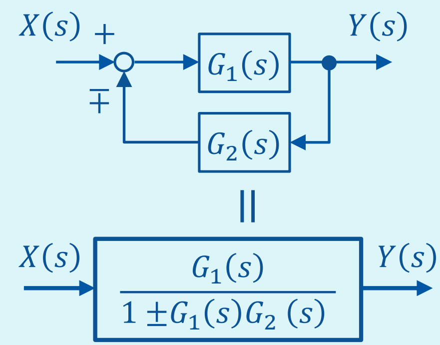
(1)直列結合



(2)並列結合



(3)フィードバック結合

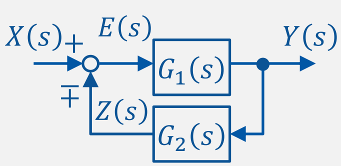


Point!

システムの入力と出力の関係はブロック線図で表すことができます。

各基本結合は，中間変数を消去する形でブロックを結合します。

例5) フィードバック結合の式の導出



左図のように$E(s)$，$Z(s)$とおくと

$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= G_1(s)E(s) & \cdots ① \\ Z(s) &= G_2(s)Y(s) & \cdots ② \\ E(s) &= X(s) \mp Z(s) & \cdots ③ \end{aligned}\right\}$$

②を③に代入して

$$E(s) = X(s) \mp G_2(s)Y(s)$$

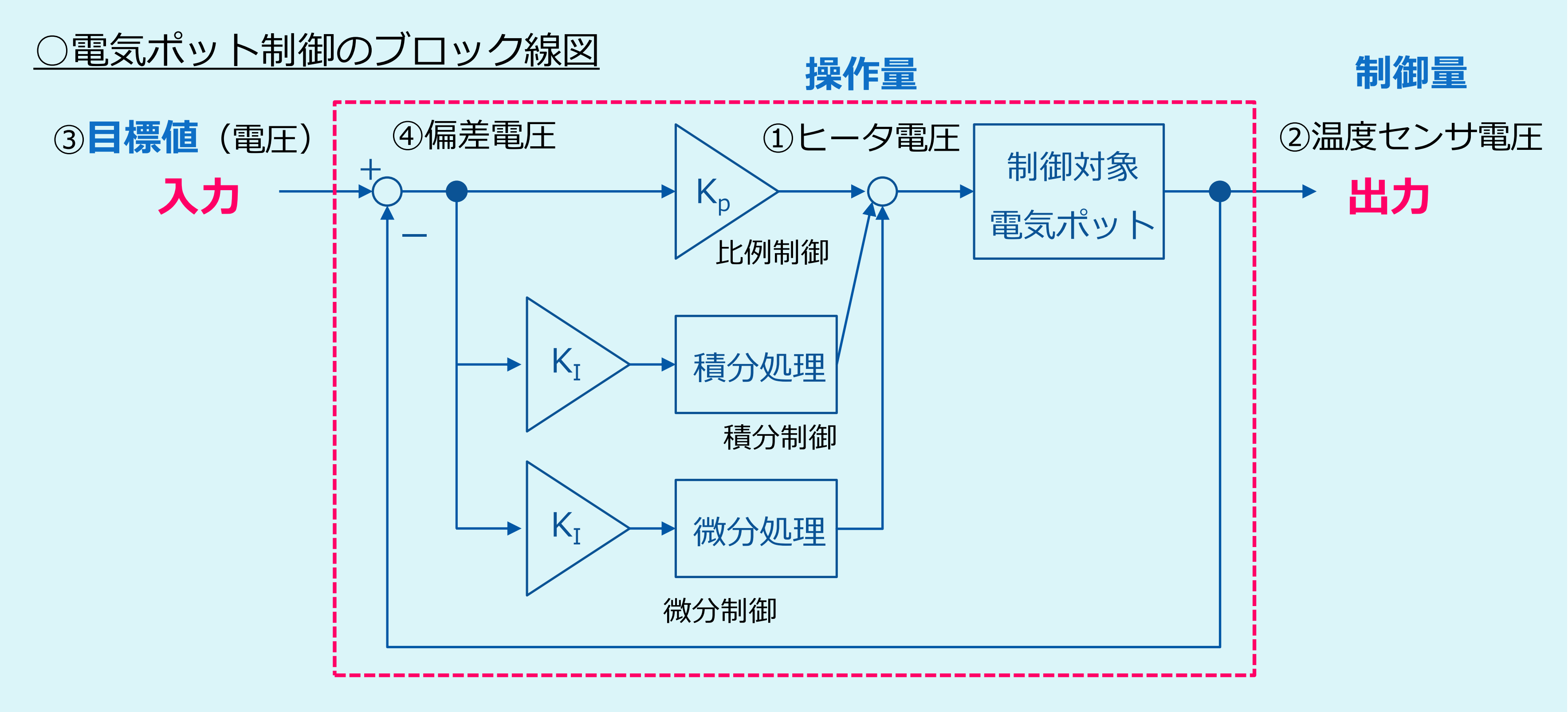
これを①に代入して

$$\therefore\ Y(s) = G_1(s)E(s) = G_1(s)\{X(s) \mp G_2(s)Y(s)\}$$

$$\therefore\ \left(1 \pm G_1(s)G_2(s)\right)Y(s) = G_1(s)X(s)$$

$$\therefore\ Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)}X(s)$$

PID制御

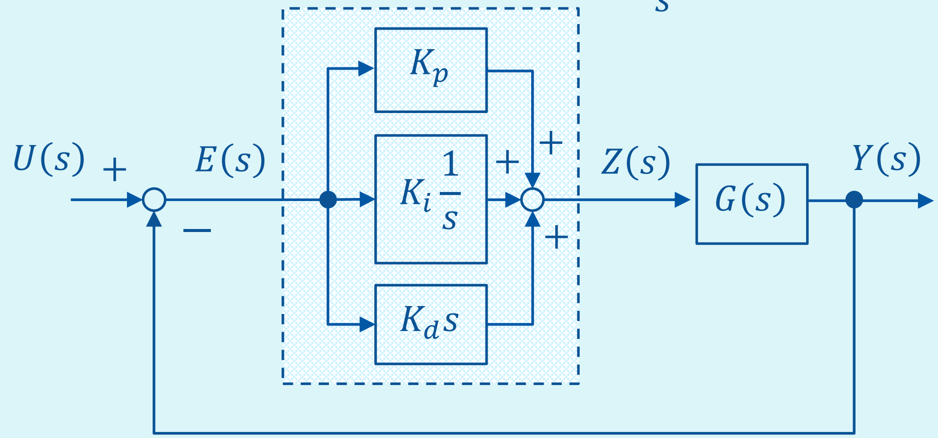


比例制御に偏差の時間積分，偏差の時間微分を操作量として加えた制御を**PID制御**とよぶ。

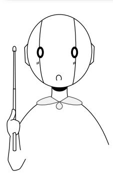
積分処理により残留偏差を制御量にとりいれ，**定常偏差を小さくできる。**
微分処理により偏差の時間変化を制御量に取り入れ，**急激な変化に対応できる。**
以上のように，制御対象は時間に関する微積分を含んだ式（微分方程式）で記述できる。

PID制御の伝達関数表現

<u>○PID制御の伝達関数表現</u>　PIDコントローラ $C(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s$



Point!



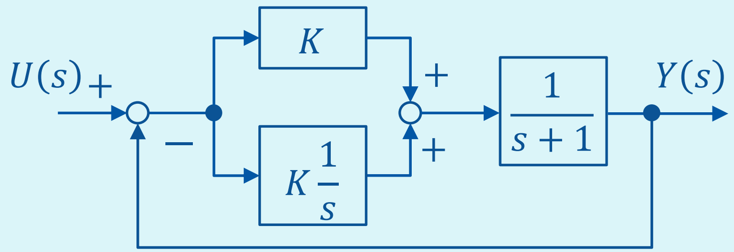
伝達関数$G(s)$を持つ制御対象にたいしてPIDコントローラ（PID制御器）を用いるときを考えてみましょう。PIDコントローラの伝達関数は，比例項，積分項，微分項を並列結合したものなので

$$C(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s$$

となります。これを制御対象に伝達関数に直列に結合し，フィードバック結合を考えればよいでしょう。

例題１２：PI制御

図のように制御対象が一次遅れ要素であるときに図内の伝達関数を持つPI制御器を用いる。このステップ応答はKによってどのように変わるか。



解)

まずPI制御器の入力点から出力点までの伝達関数をまとめる。

$$G(s) = \left(K + K\frac{1}{s}\right)\frac{1}{s+1} = K\left(\frac{s+1}{s}\right)\frac{1}{s+1} = \frac{K}{s}$$

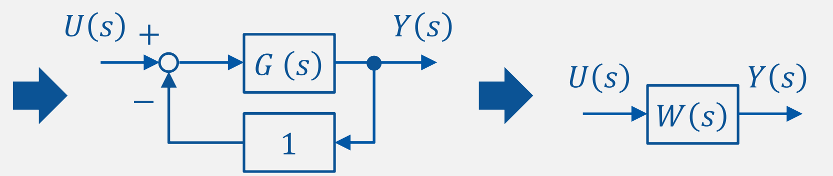
次に，閉回路をまとめた伝達関数 $W(s)$は

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s+K}$$

よって　$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{K}{s+K}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+K}$

$\therefore\ y(t) = 1 - e^{-Kt}$

Point!　**伝達関数は段階的にまとめて１つに！**



PI制御器と制御対象をG(s)にまとめる　フィードバックをまとめる

以上から***K*が大きくなるにしたがって収束が速くなる**ことがわかる。