ロボット家電と制御 第１０回

様々な応答（１）

１次遅れ要素・１次遅れ要素＋積分要素

山崎 洋一

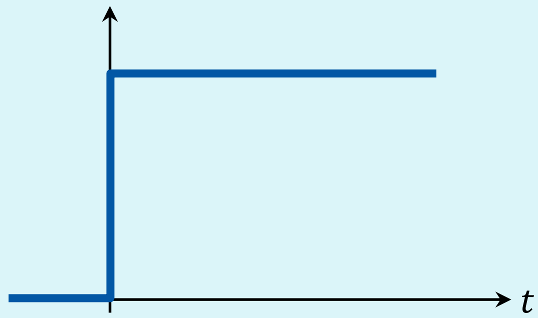
yamazaki@he.kanagawa-it.ac.jp

復習 ステップ応答・過渡応答・ 定常応答

入力に対する出力の挙動は，システムの特性に依存して決まる。伝達関数が未知のとき，システムの特性は過渡応答と定常応答から求めることができる。

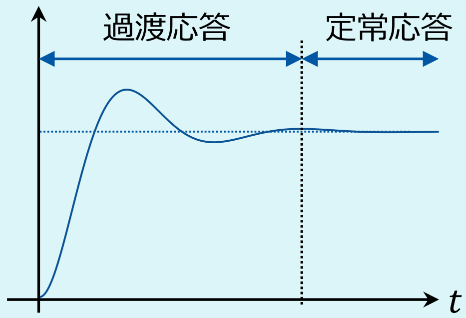
○ステップ入力とステップ応答

入力 $u(t)$



ステップ入力

出力 $y(t)$



ステップ応答

試験信号としてステップ入力（上左図）を印加したときに得られる応答を**ステップ応答**とよぶ。たとえば上右図のようなステップ応答が出力されたとする。

入力開始から出力が安定するまで を **過渡応答**

それ以降 を **定常応答** とよぶ。

復習

例題８：単位ステップ応答

神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
KAIT

次の伝達関するに対する単位ステップ応答を求めよ。

$$U(s)=\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{6}{s+3}} \longrightarrow Y(s)$$

$$u(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t\geq 0)\end{cases},\quad y(t)=?$$

解) **STEP1: 過渡応答を求める**

$$Y(s)=\frac{6}{s+3}\cdot\frac{1}{s}=\frac{2}{s}+\frac{-2}{s+3}=2\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\right)$$

より　$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[2\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\right)\right]=2(1-e^{-3t})$

STEP 2 : 定常応答を求める

$y(t)$にたいして$t\rightarrow\infty(t)$のとき

$$y(t)=2(1-e^{-3t})\xrightarrow{t\rightarrow\infty}2$$

これは最終値の定理からも求められる。

$$y(\infty)=\lim_{s\rightarrow 0}sY(s)=\lim_{s\rightarrow 0}s\cdot\frac{6}{s+3}\cdot\frac{1}{s}=2$$

t関数	s関数
1	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

Point!

過渡応答を求める手順

①出力 $Y(s)=G(s)U(s)$

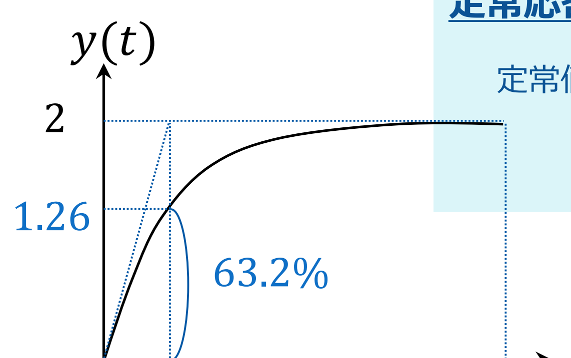
②ラプラス変換表の形に変形

③ラプラス逆変換

定常応答を求める手順

定常値 $y(\infty)=\lim_{t\rightarrow\infty}y(t)$

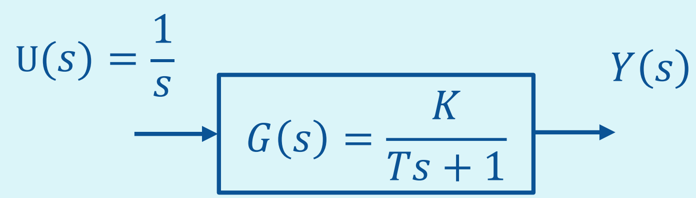
$=\lim_{s\rightarrow 0}sY(s)$



$$\tau=\frac{1}{3}=0.333[sec]$$

（1） １次遅れ要素の単位ステップ応答

○ブロック線図



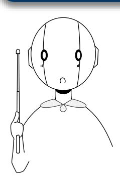
○ s 関数での出力：$Y(s)$

出力 $Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$

○ 時刻 t の関数形式での出力：$y(t)$

出力 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,Y(s)\,] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}\right] = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$

Point!



応答は右図のようになります。最終値の定理より

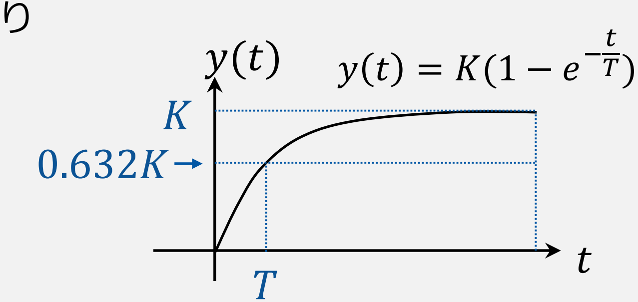
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = K$$

となり，**$y(t)$はゲインKに収束します**。

一方，時定数Tに関しては，$t = T$ のとき

$$y(T) = K\left(1 - e^{-\frac{T}{T}}\right) = K\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.632K$$

なので，**定常状態の63.2%に達するまでの時間が時定数 T** となります。



図． １次遅れ要素の単位ステップ応答

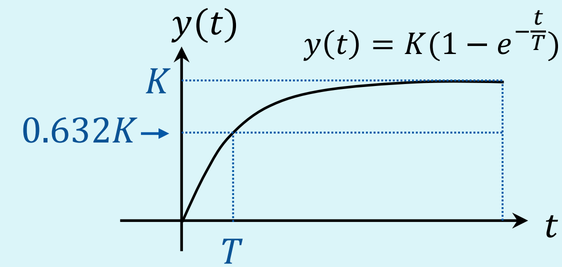
（1） 単位ステップ応答の導出

○ブロック線図

単位ステップ入力 $U(s) = \dfrac{1}{s}$ → $G(s) = \dfrac{K}{Ts+1}$ → 出力 $Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \dfrac{K}{Ts+1}\cdot\dfrac{1}{s}$

○ 時刻 t の関数形式での出力：$y(t)$

$$\text{出力 } y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,Y(s)\,] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}\right] = K(1-e^{-\frac{t}{T}})$$



求め方)

$$Y(s) = \frac{K}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s} = \left(\frac{K}{s} + \frac{-KT}{Ts+1}\right)$$ ← 部分分数分解

$$= K\left(\frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1}\right) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right)$$ ← ラプラス変換表のかたちに

よって

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,Y(s)\,] = \mathcal{L}^{-1}\left[K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right)\right]$$

$$= K(1-e^{-\frac{t}{T}})$$

[部分分数分解の手順]

$\dfrac{K}{Ts+1}\cdot\dfrac{1}{s} = \dfrac{a}{s} + \dfrac{b}{Ts+1}$ とおくと

$$\text{左辺} = \frac{a}{s} + \frac{b}{Ts+1} = \frac{a(Ts+1)+bs}{s(Ts+1)}$$

$$= \frac{(aT+b)s+a}{s(Ts+1)} = \frac{K}{s(Ts+1)} = \text{右辺}$$

となる。この係数を比較して

$$\left.\begin{aligned} aT+b&=0 \\ a&=K \end{aligned}\right\} \quad \therefore \left\{\begin{aligned} a&=K \\ b&=-KT \end{aligned}\right.$$ となる。

（1） 単位ステップ応答のパラメタ同定

神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY KAIT

○ブロック線図

単位ステップ入力

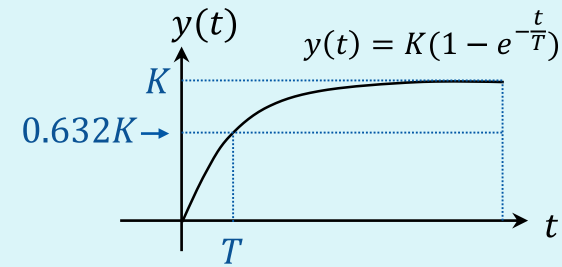
$$U(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{K}{Ts+1}} \longrightarrow$$

出力

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$$

○ 時刻 t の関数形式での出力：$y(t)$

$$\text{出力 } y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,Y(s)\,] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}\right] = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

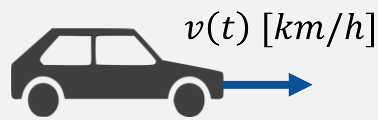


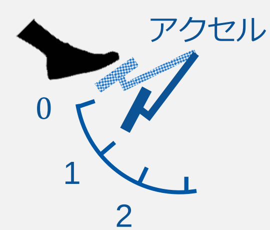
○パラメタ同定 例題９ アクセルの速度応答

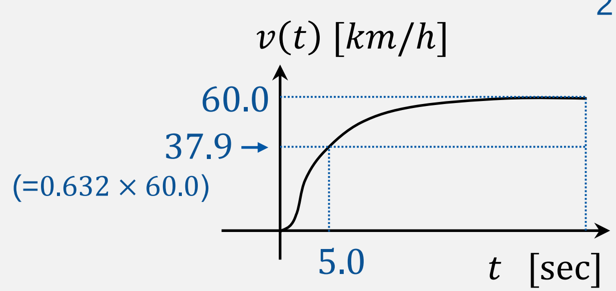
自動車のアクセルの踏み込み量と速度の関係を求める。右図で示すようにアクセルの踏み込み量を大きさ１でステップ状に与えたとき，速度はグラフのようにほぼ一次遅れ要素の特性を示した。このときの伝達関数を求めよ。

解） グラフより$K = 60.0$， $T = 5.0$ [sec] なので

$$\underline{\underline{G(s) = \frac{60.0}{5.0s+1}}}$$







図． 自動車の速度応答

神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY KAIT

（2） １次遅れ要素+積分要素の単位ステップ応答

○ブロック線図

単位ステップ入力

$U(s) = \frac{1}{s}$ → $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ → $Y(s)$

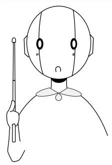
○ s 関数での出力：$Y(s)$

出力 $Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} \cdot \frac{1}{s}$

○ 時刻 t の関数形式での出力：$y(t)$

出力 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,Y(s)\,] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s(Ts+1)} \cdot \frac{1}{s}\right] = Kt + TK(e^{-\frac{t}{T}} - 1)$

Point!



応答は右図のようになります。

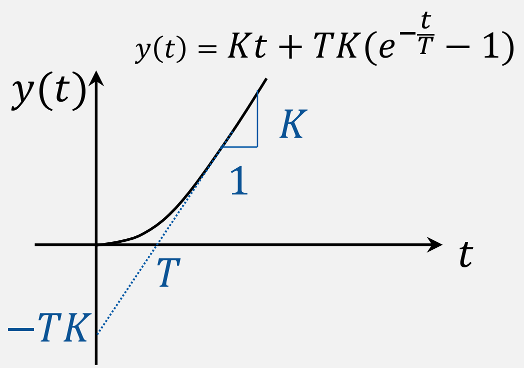
一定時間が経過した後,

$y(t)$は傾きKで増加し続けます。

その時の

接線 **$y(t) = K(t-T)$が t 軸と交差する時刻**

が 時定数 Tとなります。



図． １次遅れ要素+積分要素の単位ステップ応答

（2）　単位ステップ応答の導出

○ブロック線図

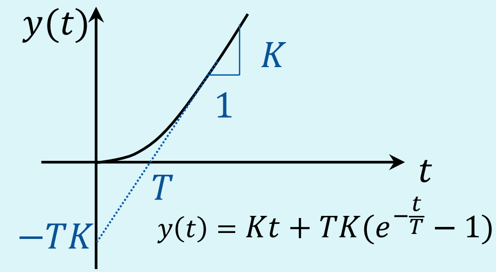
単位ステップ入力

$$U(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}} \longrightarrow Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}\cdot\frac{1}{s}$$

出力

○ 時刻 t の関数形式での出力：$y(t)$

$$\text{出力 } y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,Y(s)\,] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s(Ts+1)}\cdot\frac{1}{s}\right] = Kt + TK(e^{-\frac{t}{T}} - 1)$$



求め方)

$$Y(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}\cdot\frac{1}{s}$$

部分分数分解

$$= K\left(\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}\right)$$

ラプラス変換表のかたちに

$$= K\left(\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+\frac{1}{T}}\right) = K\left\{\frac{1}{s^2} + T\left(\frac{1}{s+\frac{1}{T}} - \frac{1}{s}\right)\right\}$$

よって

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,Y(s)\,] = Kt + TK(e^{-\frac{t}{T}} - 1)$$

(2) 単位ステップ応答の導出

[**部分分数分解**の手順]

$\frac{K}{s(Ts+1)}\cdot\frac{1}{s}=K\left(\frac{a}{s^2}+\frac{b}{s}+\frac{c}{Ts+1}\right)$ とおくと

左辺 $= K\left(\frac{a(Ts+1)+bs(Ts+1)+cs^2}{s^2(Ts+1)}\right)$

$=$ 右辺

となる。この係数を比較すると

$$\left.\begin{array}{r} a=1 \\ aT+b=0 \\ bT+c=0 \end{array}\right\} \quad \therefore \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-T \\ c=T^2 \end{array}\right.$$ となる。

よって

$$Y(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=K\left(\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T^2}{Ts+1}\right)$$

と部分分数分解できる。

表を用いた係数比較

	s^2	s	1
$a(Ts+1)$		aT	a
$bs(Ts+1)$	bT	b	
cs^2	c		
	$bT+c$	$aT+b$	a

（2） 単位ステップ応答のパラメタ同定

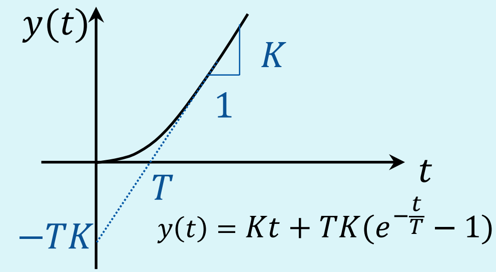
神奈川工科大学 KAIT

○ブロック線図 単位ステップ入力　　出力

$$U(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}} \longrightarrow Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}\cdot\frac{1}{s}$$

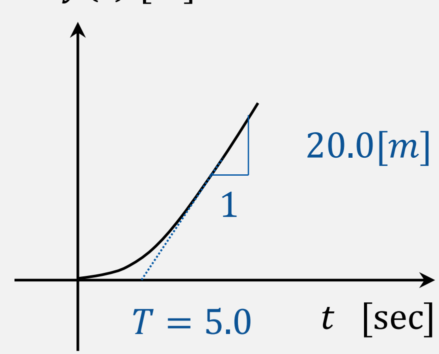
○ 時刻 t の関数形式での出力：$y(t)$

$$\text{出力 } y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,Y(s)\,] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s(Ts+1)}\cdot\frac{1}{s}\right] = Kt + TK(e^{-\frac{t}{T}} - 1)$$



○パラメタ同定　例題１０ アクセルの距離応答

　自動車のアクセルの踏み込み量と走行距離の関係を求める。アクセルの踏み込み量を大きさ１でステップ状に与えたとき，走行距離は右図で示すグラフのような一次遅れ要素+積分要素 の特性を示した。このときの伝達関数を求めよ。



図．自動車の距離応答

解）グラフより$K = 20.0$[m/s]，$T = 5.0$ [sec] なので

$$G(s) = \frac{20.0}{s(5.0s+1)}$$