ロボット家電と制御 第９回
伝達要素の応答

山崎 洋一

yamazaki@he.kanagawa-it.ac.jp

物理系の標準形

（1）1次遅れ要素 の標準形： $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$ ，K：ゲイン係数，T：時定数

… 正弦波を入力したとき出力位相が最大90°遅れる。特性をゲイン係数K，時定数Tで表す。

（2）1次遅れ要素＋積分要素 の標準形： $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$ ，K：ゲイン係数，T：時定数

… 1次遅れ要素 に積分要素が付加されたもの。

（3）2次遅れ要素 の標準形： $G(s)=\dfrac{K{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}$

K：ゲイン係数，ω_n：固有角振動数（固有角周波数），ζ：減衰比

… 正弦波を入力したとき出力位相が最大180°遅れる。

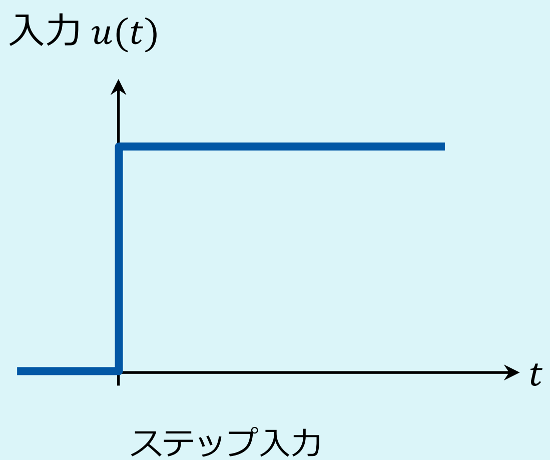
特性をゲイン係数K，固有角振動数（固有各周波数）ω_n，減衰比ζで表す

講義中に電気回路，力学といった物理系の違いに関わらず，各伝達関数を同じ標準形で表現できることを確認する。同じ標準形で表現できる要素同士には**類似性（アナロジー）がある**という。アナロジーが存在するとき物理系を考慮することなく伝達関数のみで制御系を設計できる。そのため，**特性を表すパラメタを求めることが重要**となる。

ステップ応答・過渡応答・ 定常応答

入力に対する出力の挙動は，システムの特性，伝達関数に依存して決まる。一方，伝達関数が未知のとき，システムの特性は過渡応答と定常応答から求めることができる。

例）ステップ入力とステップ応答



試験信号としてステップ入力（上左図）を印加したときに得られる応答を**ステップ応答**とよぶ。たとえば上右図のようなステップ応答が出力されたとする。

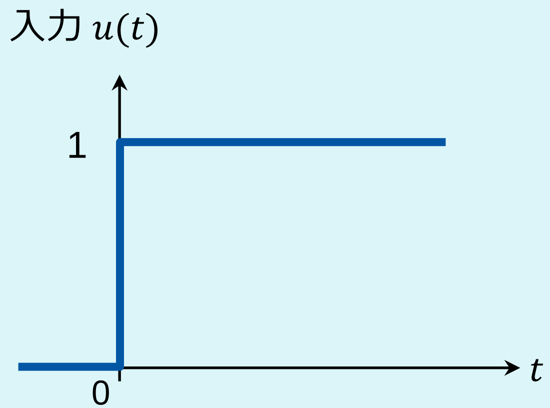
入力開始から出力が安定するまで を **過渡応答**

それ以降 を **定常応答** とよぶ。

単位ステップ関数と単位ステップ応答

○単位ステップ関数

　t=0で大きさが 0 から 1 になるステップ状の関数を**単位ステップ関数**とよぶ。また単位ステップ関数を入力としたときの応答を**単位ステップ応答**とよぶ。



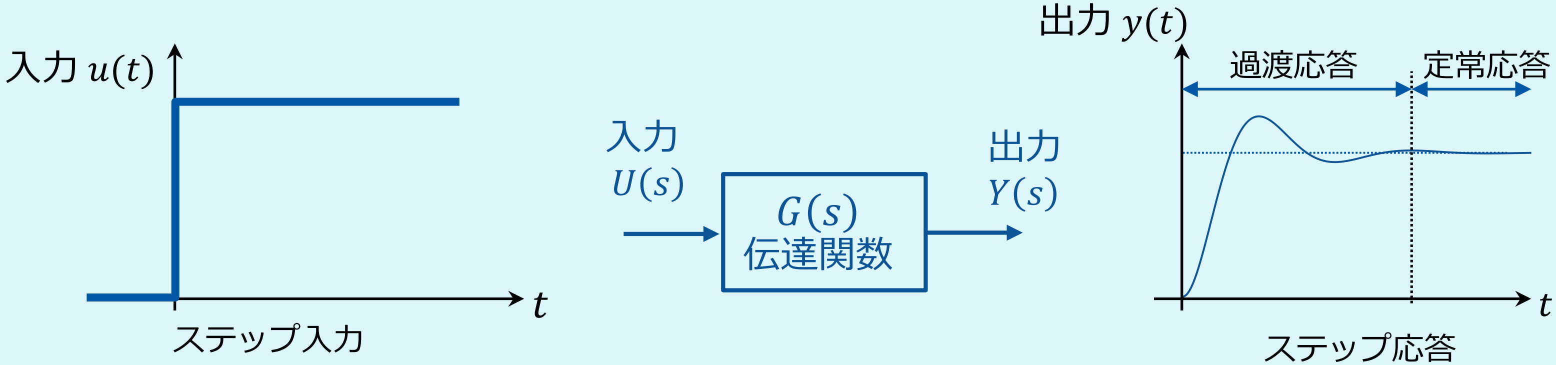
単位ステップ入力

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

　講義では，まず伝達関数に対する単位ステップ応答（過渡応答・定常応答）の求め方を学び，次に単位ステップ応答から伝達関数を求める方法を学習する。

ステップ応答の求め方

○ステップ入力とステップ応答



上図のブロック図にたいして出力は

$$Y(s)=G(s)U(s)$$

となる。時間領域（ t 関数）における出力を求めるには，これをラプラス逆変換すればよい。

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]$$

$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$： $Y(s)$のラプラス逆変換

ラプラス逆変換には，おもなラプラス変換の表を用いる。

Point!

過渡応答を求める手順

①出力 $Y(s) = G(s)U(s)$

②ラプラス変換表の形に変形

③ラプラス逆変換

定常応答を求める手順

定常値 $y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t)$

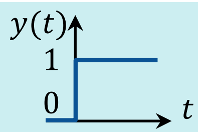
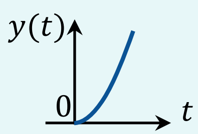
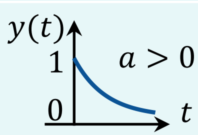
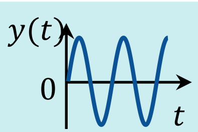
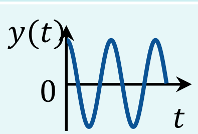
$= \lim_{s\to 0} sY(s)$

復習 ラプラス変換

神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY KAIT

<u>○ラプラス変換の定義式</u> $t \geq 0$で定義される時間関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

関数の種類	応答波形	t領域の表現 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	s領域の表現 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
単位ステップ関数		1	$\frac{1}{s}$
べき関数		t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	n=1 のときは	t	$\frac{1}{s^2}$
指数関数		e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
正弦関数		$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
余弦関数		$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

	t領域の表現 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	s領域の表現 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
線形則	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
相似則	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
s推移則	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
t推移則	$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
微分則	$\frac{d}{dt}f(t)$	$sF(s) - f(0)$
積分則	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}f'(0)$

例題８：単位ステップ応答

次の伝達関するに対する単位ステップ応答を求めよ。

$$U(s)=\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{6}{s\ \ +3}} \longrightarrow Y(s)$$

$$u(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t\geq 0)\end{cases}, \quad y(t)=?$$

解) **STEP1: 過渡応答を求める**

① 出力$Y(s)$は

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{6}{s+3}\cdot\frac{1}{s}$$

② これをラプラス変換表に適合するように**部分分数分解**して（分数－分数）の形に変形すると

$$Y(s)=\frac{6}{s+3}\cdot\frac{1}{s}=\frac{2}{s}+\frac{-2}{s+3}=2\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\right)$$

③これをラプラス逆変換して

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[2\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\right)\right]$$

$$=2(1-e^{-3t})$$

t関数	s関数
1	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

[部分分数分解の手順]

$$\frac{6}{s+3}\cdot\frac{1}{s}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+3}$$

とおくと

$$右辺=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+3}=\frac{a(s+3)+bs}{s(s+3)}$$

$$=\frac{(a+b)s+3a}{s(s+3)}=\frac{6}{s(s+3)}=左辺$$

となる。この係数を比較して

$$\left.\begin{array}{r}a+b=0\\ 3a=6\end{array}\right\}=\begin{cases}a=2\\ b=-2\end{cases}$$ となる。

Point!

過渡応答を求める手順

①出力 $Y(s)=G(s)U(s)$

②ラプラス変換表の形に変形

③ラプラス逆変換

例題８：単位ステップ応答

神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY KAIT

次の伝達関数に対する単位ステップ応答を求めよ。

$$U(s)=\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{6}{s+3}} \longrightarrow Y(s)$$

$$u(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t\geq 0)\end{cases},\quad y(t)=?$$

解) **STEP 2：定常応答を求める**

$y(t)$にたいして$t\rightarrow\infty(t)$のとき

$$y(t)=2(1-e^{-3t})\xrightarrow{t\rightarrow\infty}\underline{\underline{2}}$$

となり定常値 2 を得る。

また定常値は**最終値の定理**を用いて伝達関数から直接求めることもできる。

$Y(s)=\frac{6}{s+3}\cdot\frac{1}{s}$ にたいして最終値の定理より

$$y(\infty)=\lim_{s\rightarrow 0} sY(s)=\lim_{s\rightarrow 0} s\cdot\frac{6}{s+3}\cdot\frac{1}{s}=\lim_{s\rightarrow 0}\frac{6}{s+3}$$

$$\underline{\underline{=2}}$$

Point!

定常応答を求める手順

最終値の定理

$$\text{定常値 } \boldsymbol{y(\infty)=\lim_{t\rightarrow\infty} y(t)=\lim_{s\rightarrow 0} sY(s)}$$