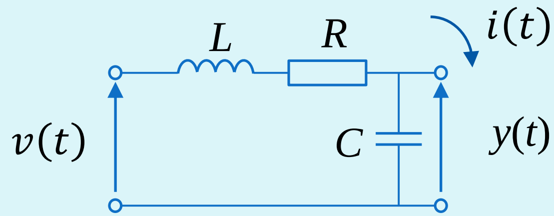
# ロボット家電と制御 第８回
# 各系のアナロジーと標準形

山崎 洋一

yamazaki@he.kanagawa-it.ac.jp

# 復習 電気回路モデルと力学モデルの類似性

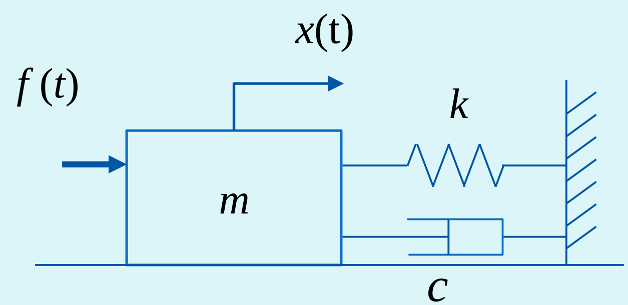
### ○電気回路モデル




$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$L \Leftrightarrow m$
$R \Leftrightarrow c$
$1/C \Leftrightarrow k$

### ○力学モデル




$$f(t) = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t)$$

　電気，力学，水位の各モデルは，物理系は異なるものの時間関数の形に着目すると類似していることに気がつく。これまでに示した電気，力学，水位の各モデルの伝達関数は，次に示す

**（１）１次遅れ要素，（２）１次遅れ要素＋積分要素，（３）２次遅れ要素**

の標準形で表すことができる。

# 物理系の標準形

**（1）１次遅れ要素 の標準形**： $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$ ，$K$：ゲイン係数，$T$：時定数

… 正弦波を入力したとき出力位相が最大90°遅れる。特性をゲイン係数$K$，時定数$T$で表す。

**（2）１次遅れ要素＋積分要素 の標準形**： $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$ ，$K$：ゲイン係数，$T$：時定数

… １次遅れ要素 に積分要素が付加されたもの。

**（3）２次遅れ要素 の標準形**： $G(s)=\dfrac{K{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}$

$K$：ゲイン係数，$\omega_n$：固有角振動数（固有角周波数），$\zeta$：減衰比

… 正弦波を入力したとき出力位相が最大180°遅れる。

特性をゲイン係数$K$，固有角振動数（固有各周波数）$\omega_n$，減衰比$\zeta$で表す

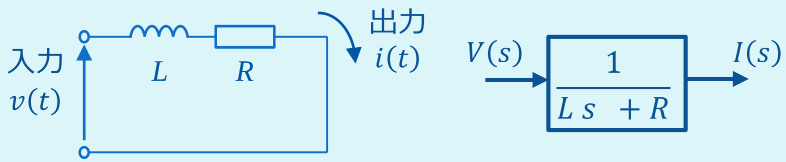
講義中に電気回路，力学といった物理系の違いに関わらず，各伝達関数を同じ標準形で表現できることを確認する。同じ標準形で表現できる要素同士には**類似性（アナロジー）がある**という。アナロジーが存在するとき物理系を考慮することなく伝達関数のみで制御系を設計できる。そのため，**特性を表すパラメタを求めることが重要**となる。

標準形で表す

# 電気回路モデルと力学モデルの比較



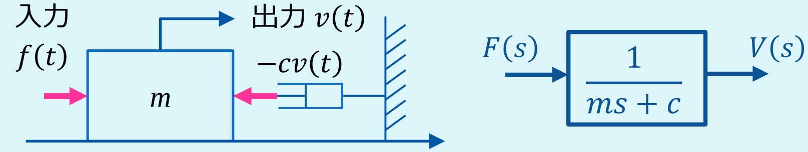
## RL直列回路の伝達関数（電流出力）




$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t)$$

**（１）１次遅れ要素**

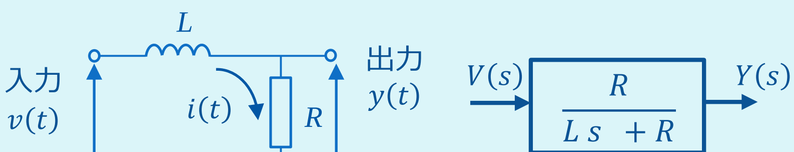
## 質量－ダンパ系の伝達関数（速度出力）




$$f(t) = m\frac{dv(t)}{dx} + cv(t)$$

**（１）１次遅れ要素**

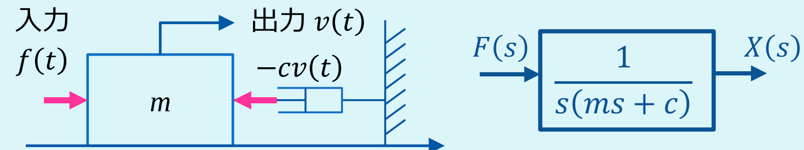
## RL直列回路の伝達関数（電圧出力）




**（１）１次遅れ要素**

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t)$$

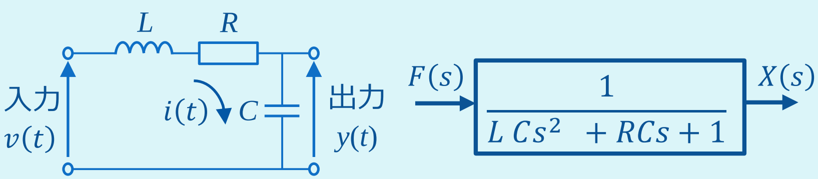
## 質量－ダンパ系の伝達関数（変位出力）




$$f(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{dx(t)}{dt}$$

**（２）１次遅れ要素**
**＋積分要素**

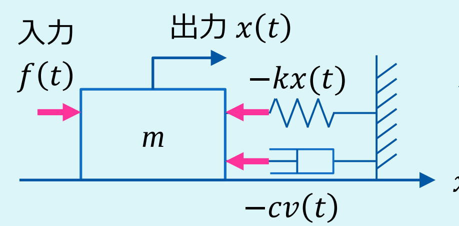
## RLC直列回路の伝達関数

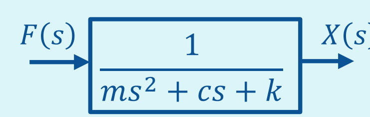



$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

**（３）**
**２次遅れ要素**

## ばね－質量－ダンパ系の伝達関数




$$f(t) = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t)$$

**（３）**
**２次遅れ要素**

# １）１次遅れ要素 の標準形： $G(s)=K/(Ts+1)$

**（１）１次遅れ要素 の標準形：** $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$ ，$K$：ゲイン係数，$T$：時定数

… 正弦波を入力したとき出力位相が最大90°遅れる。特性をゲイン係数$K$，時定数$T$で表す。

## ○１次遅れ要素 の標準形の各パラメタ

例5). RL直列回路の伝達関数（電流出力）

$$G(s)=\frac{I(s)}{V(s)}=\frac{1}{Ls\ +R}=\frac{1/R}{(L/R)\,s\ +1}$$

１次遅れ要素 の標準形

$$\frac{\triangle}{\bigcirc s+1}$$

の形にあわせる

この係数を

１次遅れ要素の標準形 $G(s)=\frac{K}{Ts+1}$

の各パラメタと比較して

ゲイン係数 $K=\dfrac{1}{R}$ ，　　時定数 $T=\dfrac{L}{R}$

を得る。

**（2）１次遅れ要素＋積分要素 の標準形：** $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$ ，$K$：ゲイン係数，$T$：時定数

… １次遅れ要素 に積分要素が付加されたもの。

○１次遅れ要素＋積分要素 の標準形の各パラメタ

例6). 質量－ダンパ系の伝達関数（変位出力）

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{s(ms+c)}=\frac{\frac{1}{c}}{s\left(\frac{m}{c}s+1\right)} \longleftarrow$$

１次遅れ要素＋積分要素 の標準形

$$\frac{\triangle}{s(\bigcirc s+1)}$$

の形にあわせる

この係数を

１次遅れ要素の標準形＋積分要素 $G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$

の各パラメタと比較して

ゲイン係数 $K=\dfrac{1}{c}$ ，　時定数 $T=\dfrac{m}{c}$

を得る。

**（3）２次遅れ要素 の標準形：** $G(s)=\dfrac{K\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$

$K$：ゲイン係数，$\omega_n$：固有角振動数（固有角周波数），$\zeta$：減衰比

… 正弦波を入力したとき出力位相が最大180°遅れる。

特性をゲイン係数$K$，固有角振動数（固有角周波数）$\omega_n$，減衰比$\zeta$で表す

$\zeta$： ツェータ

(Zの小文字)

○２次遅れ要素の標準形の各パラメタ

例7). RLC直列回路の伝達関数

$$G(s)=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

$$=\frac{1/LC}{s^2+(R/L)s+1/LC}$$

$$=\frac{1\times\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}{s^2+2\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{\sqrt{LC}}s+\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}$$

① $s^2$の係数
② $\omega_n{}^2$
③ △ $\omega_n{}^2$
④2○$\omega_n s$
の順に
標準形に
あわせる

この係数を２次遅れ要素の標準形

$$G(s)=\frac{K\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

の各パラメタと比較して

ゲイン係数 $K=1$，

固有角振動数$\omega_n=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$,

減衰比$\zeta=\dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

を得る。