ロボット家電と制御 第７回
力学モデルの伝達関数

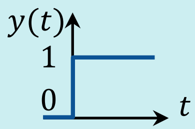
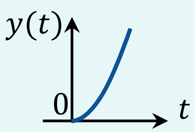
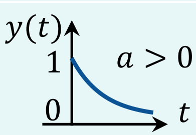
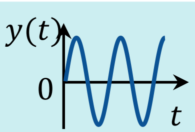
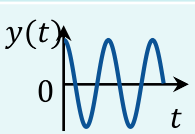
山崎 洋一
yamazaki@he.kanagawa-it.ac.jp

復習

ラプラス変換

<u>○ラプラス変換の定義式</u>　$t \geq 0$で定義される時間関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

関数の種類	応答波形	t領域の表現 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	s領域の表現 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
単位ステップ関数		1	$\frac{1}{s}$
べき関数		t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	n=1 のときは	t	$\frac{1}{s^2}$
指数関数		e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
正弦関数		$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
余弦関数		$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

	t領域の表現 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	s領域の表現 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
線形則	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
相似則	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
s推移則	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
t推移則	$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
微分則	$\frac{d}{dt}f(t)$	$sF(s) - f(0)$
積分則	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}f'(0)$

復習　伝達関数 $G(s)$

○ラプラス変換のイメージ

t関数：微分方程式

①ラプラス変換

s関数：② 四則演算

入力 $x(t)$ → $x(t)$と$y(t)$の微分方程式の解 → 出力 $y(t)$

③ラプラス逆変換

入力 $X(s)$ → $G(s)$ 伝達関数 → 出力 $Y(s)=G(s)X(s)$

多くの動的システムでは，
　出力 $y(t)$ は入力 $x(t)$ に対する線形常微分方程式で表現できる。

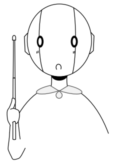
入力 $x(t)$ → $x(t)$と$y(t)$の微分方程式の解 → 出力 $y(t)$

これをラプラス変換で表現すると

入力 $X(s)$ → $G(s)$ 伝達関数 → 出力 $Y(s)=G(s)X(s)$

となり出力は $Y(s)=G(s)X(s)$ と表現できる。この入力に対する出力の比 $G(s)$ を伝達関数とよぶ。

Point!



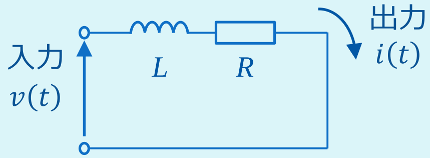
　左で示すようにラプラス変換したときの入力 $X(s)$に対する出力 $Y(s)$ の比が伝達関数$G(s)$です。
いいかえると，

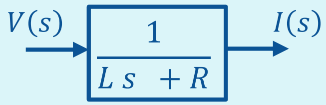
$$伝達関数\ G(s)=\frac{出力\ Y(s)}{入力\ X(s)}$$

の関係が成り立ちます。
伝達関数の形からシステムの挙動特性を予測できるため，伝達関数を求められることが重要になります。

復習 電気回路モデルの伝達関数

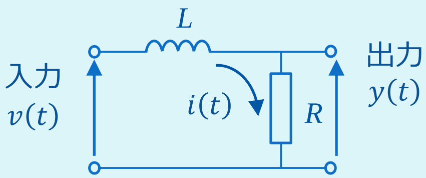
RL直列回路の伝達関数（電流出力）

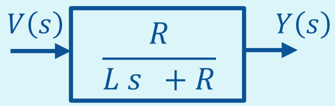




$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t)$$

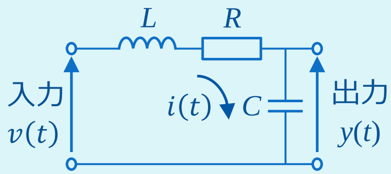
RL直列回路の伝達関数（電圧出力）

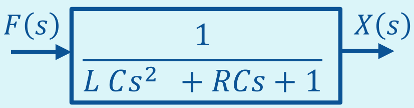




$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t)$$

RLC直列回路の伝達関数

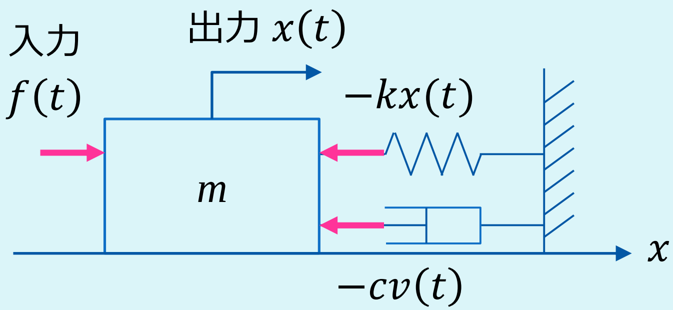




$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

力学モデルの要素：ばねー質量ーダンパ

○ばねー質量ーダンパモデル



k：ばね定数 [N/m]

c：粘性減衰係数 [Ns/m]

運動方程式 $ma = f(t) - kx(t) - cv(t)$

これを$f(t)$について解くと

$$f(t) = ma + cv(t) + kx(t)$$

となる。これは

$$f(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{dx(t)}{dt} + kx(t)$$

$$f(t) = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t)$$

とも表すことができる。

加速度，速度，位置の関係

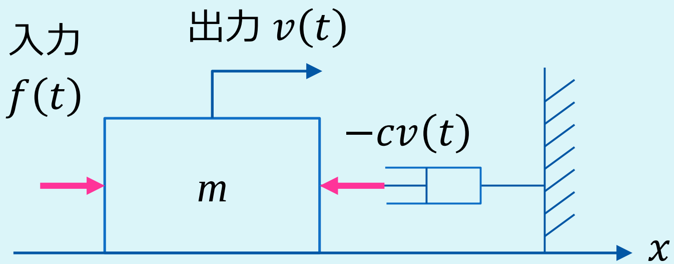
積分 ↕ 微分

- 位置 x
- 速度 $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$
- 加速度 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

例題５：質量－ダンパ系の伝達関数（速度出力）

神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY KAIT

図に示す質量－ダンパ系について，物体に加える力$f(t)$ [N]を入力，物体の速度 $v(t)$ [m/s]を出力とする。このときの伝達関数を求めよ。



運動方程式　$ma = f(t) - cv(t)$

解)

運動方程式より　$ma = f(t) - cv(t)$

よって

$$f(t) = ma + cv(t)$$

$$= m\frac{dv(t)}{dx} + cv(t)$$

出力$\boldsymbol{v(t)}$の微分方程式

これを初期値0としてラプラス変換すると

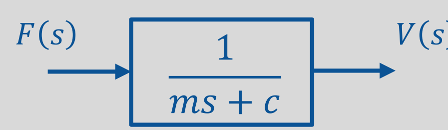
$$F(s) = msV(s) + cV(s)$$
$$= (ms + c)V(s)$$

よって伝達関数$G(s)$は

$$G(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms + c}$$

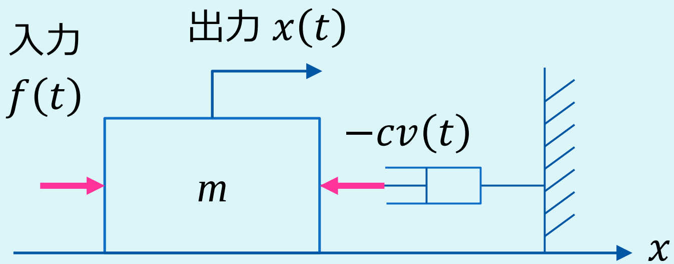
となる。

ブロック線図で表すと下記のようになる。



例題６：質量－ダンパ系の伝達関数（変位出力）

図に示す質量－ダンパ系について，物体に加える力$f(t)$ [N]を入力，物体の変位 $x(t)$ [m]を出力とする。このときの伝達関数を求めよ。



運動方程式　$ma = f(t) - cv(t)$

解)

運動方程式より　$ma = f(t) - cv(t)$

よって　$f(t) = ma + cv(t)$

$$= m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{dx(t)}{dt}$$

出力$\boldsymbol{x(t)}$の微分方程式

これを初期値0としてラプラス変換すると

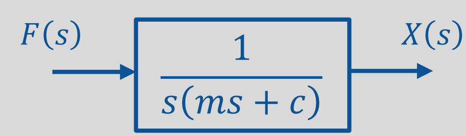
$$F(s) = ms^2X(s) + csX(s)$$
$$= (ms^2 + cs)X(s)$$
$$= s(ms + c)X(s)$$

よって伝達関数$G(s)$は

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s(ms + c)}$$

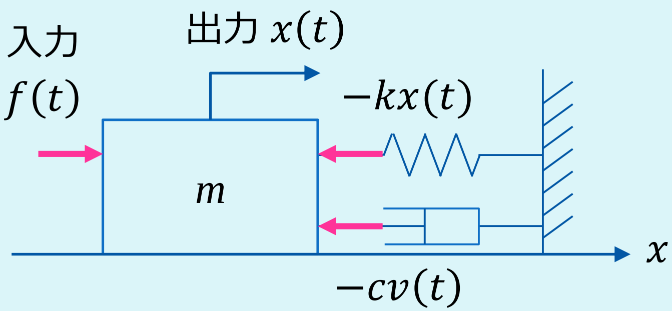
となる。

ブロック線図で表すと下記のようになる。



例題７：ばねー質量ーダンパ系の伝達関数

図に示すばねｰ質量ｰダンパ系について，物体に加える力$f(t)$ [N]を入力，物体の変位$x(t)$ [m]を出力とする。このときの伝達関数を求めよ。



運動方程式　$ma = f(t) - kx(t) - cv(t)$

解)

運動方程式より　$ma = f(t) - kx(t) - cv(t)$

よって　$f(t) = ma + cv(t) + kx(t)$

$$= m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{dx(t)}{dt} + kx(t)$$

出力$\boldsymbol{x(t)}$の微分方程式

これを初期値0としてラプラス変換すると

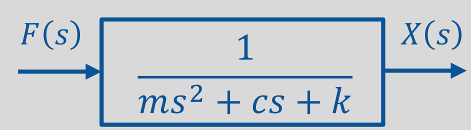
$$F(s) = ms^2X(s) + csX(s) + kX(s)$$
$$= (ms^2 + cs + k)X(s)$$

よって伝達関数$G(s)$は

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

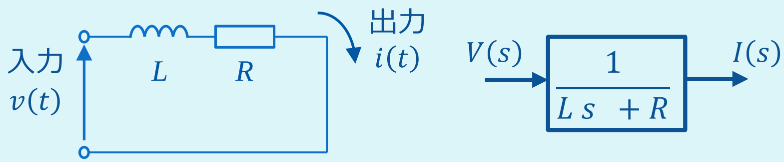
となる。

ブロック線図で表すと下記のようになる。



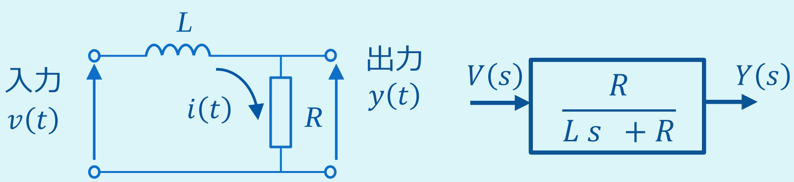
電気回路モデルと力学モデルの比較

RL直列回路の伝達関数（電流出力）



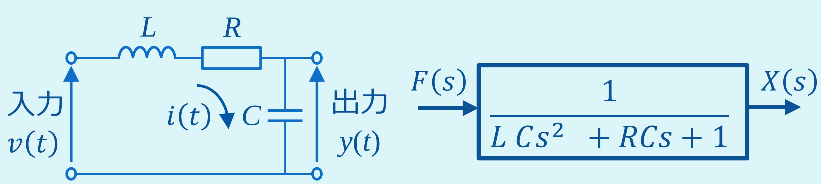
$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t)\ + Ri(t)$$

RL直列回路の伝達関数（電圧出力）



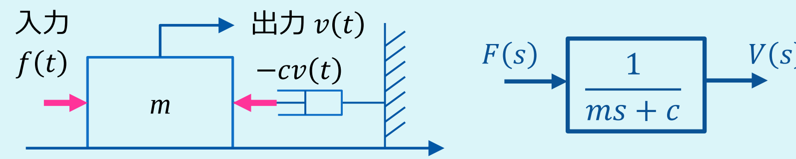
$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t)\ + Ri(t)$$

RLC直列回路の伝達関数



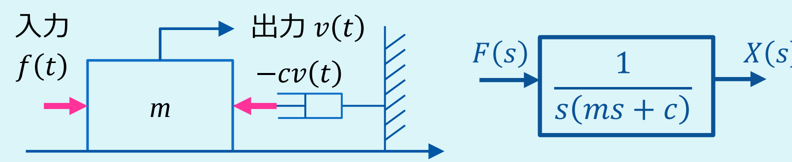
$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

質量－ダンパ系の伝達関数（速度出力）



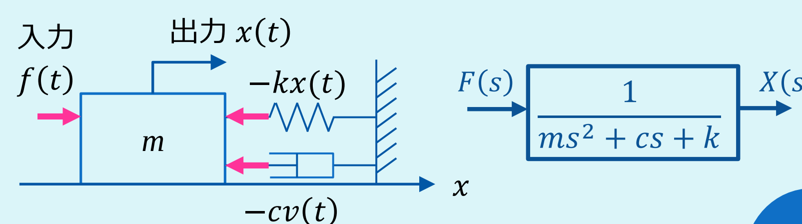
$$f(t) = m\frac{dv(t)}{dx} + cv(t)$$

質量－ダンパ系の伝達関数（変位出力）



$$f(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{dx(t)}{dt}$$

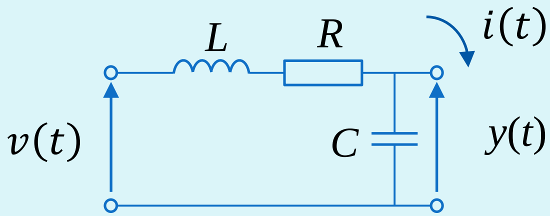
ばね－質量－ダンパ系の伝達関数



$$f(t) = m\ddot{x}\ (t) + c\dot{x}(t) + kx(t)$$

電気回路モデルと力学モデルの類似性

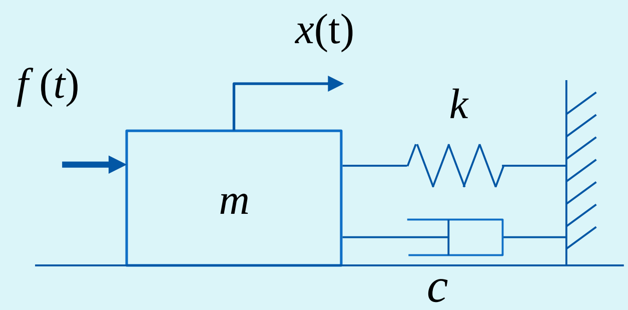
○電気回路モデル



$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

L	$\Leftrightarrow$	?
R	$\Leftrightarrow$	?
$1/C$	$\Leftrightarrow$	?

○力学モデル



$$f(t) = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t)$$

電気，力学，水位の各モデルは，物理系は異なるものの時間関数の形に着目すると類似していることに気がつく。これまでに示した電気，力学，水位の各モデルの伝達関数は，次に示す

（１）１次遅れ要素，（２）１次遅れ要素＋積分要素，（３）２次遅れ要素

の標準形で表すことができる。