# ロボット家電と制御 第６回

# 電気系モデルの伝達関数

山崎 洋一

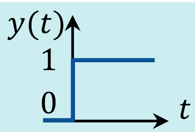
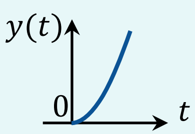
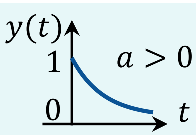
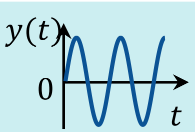
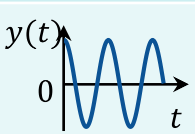
yamazaki@he.kanagawa-it.ac.jp

# 復習 今日のまとめ：ラプラス変換

神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY KAIT

<u>○ラプラス変換の定義式</u> $t \geq 0$で定義される時間関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は

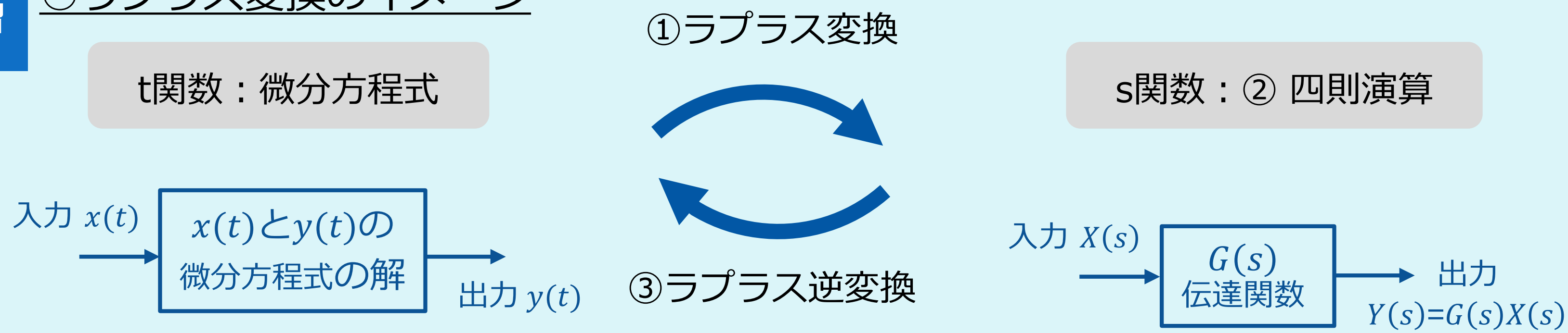
$$F(s) = \mathcal{L}\,[f(t)\,] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

| 関数の種類 | 応答波形 | $t$領域の表現 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)\,]$ | $s$領域の表現 $F(s) = \mathcal{L}\,[f(t)\,]$ |
|---|---|---|---|
| 単位ステップ関数 |  | $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| べき関数 |  | $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| | n=1 のときは | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| 指数関数 |  | $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| 正弦関数 |  | $\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 余弦関数 |  | $\cos\omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |

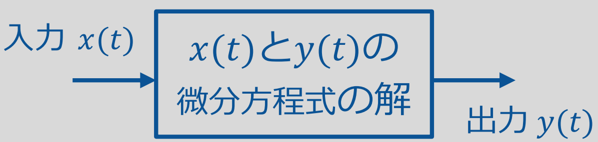
| | $t$領域の表現 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)\,]$ | $s$領域の表現 $F(s) = \mathcal{L}\,[f(t)\,]$ |
|---|---|---|
| 線形則 | $af(t) + bg(t)$ | $aF(s) + bG(s)$ |
| 相似則 | $f(at)$ | $\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| $s$推移則 | $e^{-at}f(t)$ | $F(s+a)$ |
| $t$推移則 | $f(t-a)$ | $e^{-as}F(s)$ |
| 微分則 | $\frac{d}{dt}f(t)$ | $sF(s) - f(0)$ |
| 積分則 | $\int_0^t f(\tau)d\tau$ | $\frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}f'(0)$ |

神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY KAIT

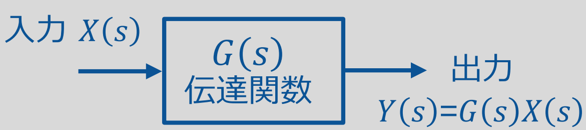
**復習** ○ラプラス変換のイメージ




多くの動的システムでは,
　出力 $y(t)$ は入力 $x(t)$ に対する線形常微分方程式で表現できる。

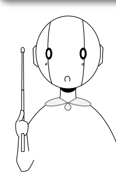



これをラプラス変換で表現すると




となり出力は $Y(s)=G(s)X(s)$ と表現できる。この入力に対する出力の比 $G(s)$ を伝達関数とよぶ。

Point!



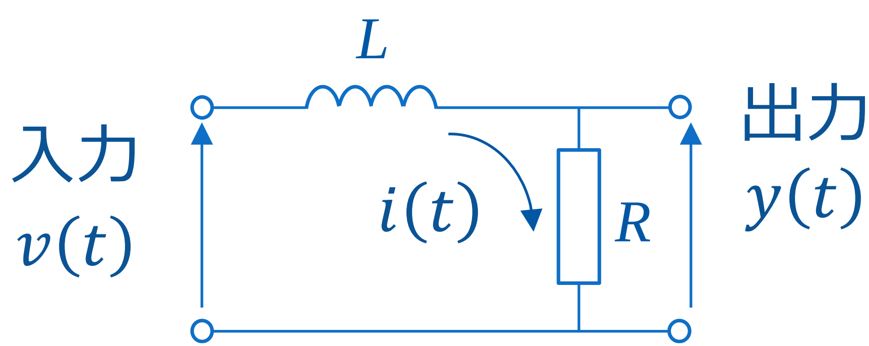
　左で示すようにラプラス変換したときの入力 $X(s)$に対する出力 $Y(s)$ の比が伝達関数$G(s)$です。
いいかえると,

$$伝達関数\ G(s) = \frac{出力\ Y(s)}{入力\ X(s)}$$

の関係が成り立ちます。
伝達関数の形からシステムの挙動特性を予測できるため，伝達関数を求められることが重要になります。

# 電気素子の電圧降下

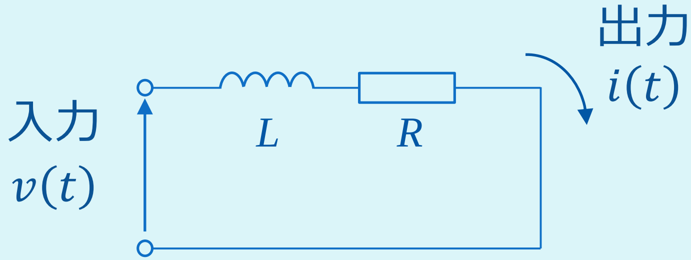
|  | 抵抗 $R$ [Ω] | コンデンサ $C[F]$ | コイル $L[H]$ |
|---|---|---|---|
|  | i(t) $R$ | i(t) $C$ | i(t) $L$ |
| 電圧降下 | $v_i(t) = Ri(t)$ | $v_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$ | $v_L(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$ |



# 例題２：RL直列回路の伝達関数（電流出力）

神奈川工科大学
KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
KAIT

図に示すRL回路について，回路に印加する電圧$v(t)$ [V]を入力，回路を流れる電流$i(t)$ [A]を出力とする。このときの回路の式，および伝達関数を求めよ。




解)
キルヒホッフの第二則より回路の式は

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t)$$

これを初期値0としてラプラス変換すると

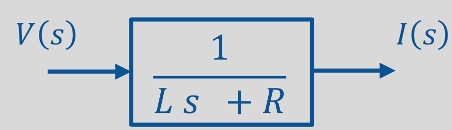
$$\mathcal{L}[v(t)] = \mathcal{L}\left[L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t)\right]$$

$$\begin{aligned} \therefore \ V(s) &= L\,s\,I(s) + R\,I(s) \\ &= (L\,s + R)\,I(s) \qquad \ldots(1) \end{aligned}$$

よって伝達関数$G(s)$は

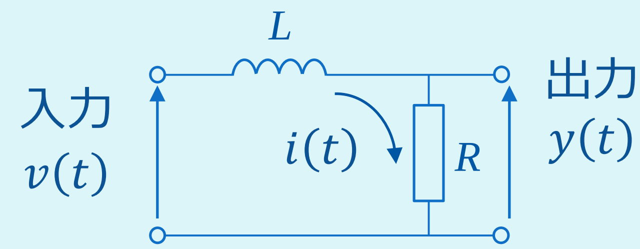
$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{L\,s + R}$$

となる。
ブロック線図で表すと下記のようになる。



# 例題３：RL直列回路の伝達関数（電圧出力）

図に示すRL回路について，回路に印加する電圧$v(t)$ [V]を入力，抵抗 $R$ における電圧降下 $y(t)$ [V]を出力とする。このときの $y(t)$ についての関係式，および伝達関数を求めよ。




解)

抵抗 $R$ での電圧降下$y(t)$は

$$\underline{\underline{y(t) = Ri(t)}}$$

これを初期値0としてラプラス変換すると

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[Ri(t)]$$

$$\therefore \quad Y(s) = R\,I(s) \qquad \ldots(2)$$

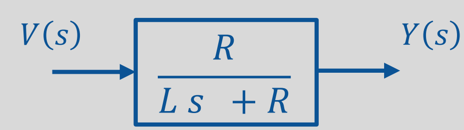
先の $V(s) = (Ls + R)\,I(s)$ ...(1) 再掲

より，伝達関数 $G(s)$ は $(2) \div (1)$ で求められる。

$$\underline{\underline{G(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{RI(s)}{(Ls + R)\,I(s)} = \frac{R}{Ls + R}}}$$

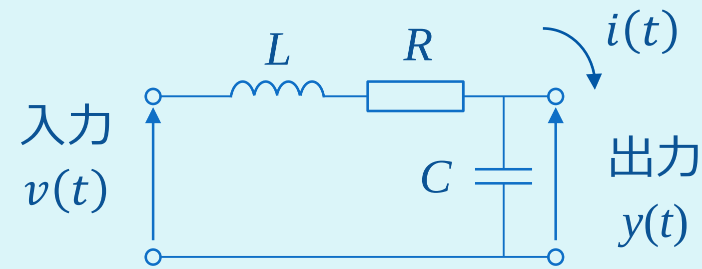
となる。

ブロック線図で表すと下記のようになる。



# 例題４：RLC直列回路の伝達関数

図に示すRLC回路について，回路に印加する電圧$v(t)$ [V]を入力，コンデンサ$C$ での電圧降下 $y(t)$[V]を出力とする。 このときの伝達関数を求めよ。




解)

コンデンサ$C$ での電圧降$y(t)$は

$$y(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad ...(3)$$

キルヒホッフの第二則より回路の式は

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad ...(4)$$

(3), (4)を初期値0としてラプラス変換すると

$$Y(s) = \frac{1}{Cs}\, I(s)$$

$$V(s) = L\,sI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs}\, I(s)$$

$$= \left(L\,s + R + \frac{1}{Cs}\right) I(s)$$

よって$G(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{1}{L\,Cs^2 + RCs + 1}$

となる。

ブロック線図で表すと下記のようになる。