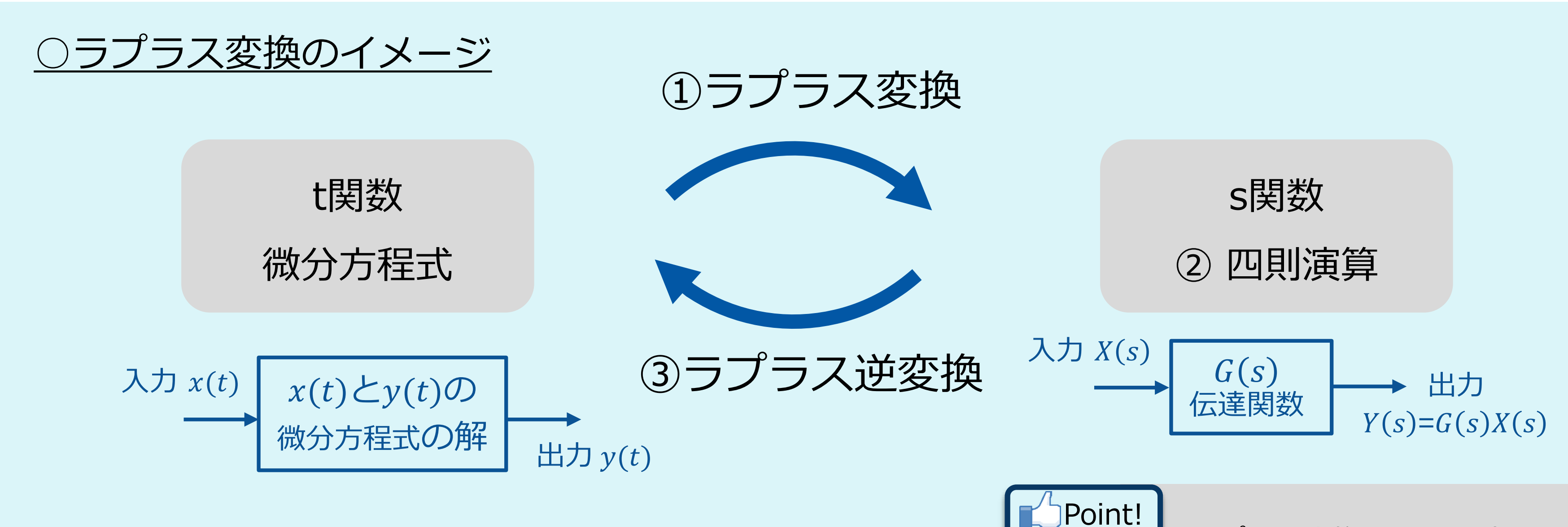
ロボット家電と制御 第5回

ラプラス変換

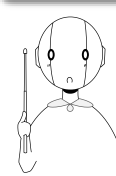
山崎 洋一

yamazaki@he.kanagawa-it.ac.jp

先週の復習：ラプラス変換の手順



Point!



ラプラス変換すると，時間t領域の微分方程式を，s領域の代数方程式（四則演算）として解くことができます。

微分方程式を解くのは，一般には難しい。
（手計算で解けるものは決まってる！！）
そこで動的システムでは，
時間関数（t関数）からなる微分方程式を解く際，

Step1: ラプラス変換という時間操作を加えて別の関数（s関数）に変換し，
Step2: s関数として伝達関数×入力を計算した結果を
Step3: ラプラス逆変換しt関数に戻して

入力に対する出力を求める。

ラプラス変換の定義

○ラプラス変換の定義

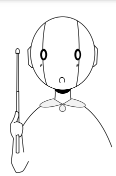
関数$f(t)$にe^{-st}かけて
0から∞まで時間積分

$t \geq 0$で定義される時間関数 $f(t)$ があるとき

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

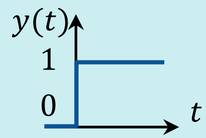
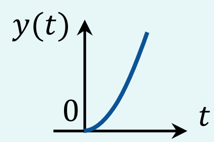
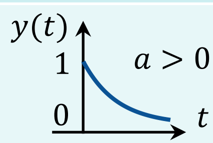
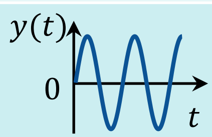
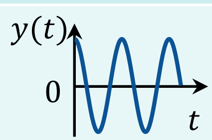
を $f(t)$ のラプラス変換とよぶ。

Point!



ラプラス変換を用いて時間 tの関数を s関数に変換することにより，
時間t 領域の微分方程式を， s領域の代数方程式として解くことができます。

主なラプラス変換

関数の種類	応答波形	時間t領域の表現 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	s領域の表現 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
単位ステップ関数		1	$\dfrac{1}{s}$
べき関数		t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
	たとえば n=1 のときは	t	$\dfrac{1}{s^2}$
指数関数		e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
正弦関数		$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
余弦関数		$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

計算例…（理解を深めるためであり，実際に計算することはない）

神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

KAIT

○ラプラス変換の定義式 $t \geq 0$で定義される時間関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は

$$F(s) = \mathcal{L}\,[f(t)\,] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

← 関数$f(t)$にe^{-st}かけて0から∞まで時間積分

例1). $f(t) = 1$のラプラス変換

$$F(s) = \mathcal{L}\,[1] = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

指数関数の積分

$$\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} + C \quad (C\text{: 定数})$$

例2). $f(t) = t$ のラプラス変換

$$F(s) = \mathcal{L}\,[t] = \int_0^\infty t \cdot e^{-st} dt = \left[t\left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) \right]_0^\infty - \int_0^\infty 1 \cdot \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) dt$$

$$= (0-0) + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

部分積分の公式

$$\int \underbrace{f'(x)}_{\text{積分}} \underbrace{g(x)}_{\text{そのまま}} dx = \underbrace{f(x)}_{\text{積分}} g(x) - \int f(x) \underbrace{g'(x)}_{\text{微分}} dx$$

極限：**関数の発散スピードは**

多項式 << 指数関数

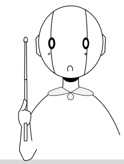
なので $\lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^{st}} = 0$

例3). $f(t) = e^{-at}$のラプラス変換

$$F(s) = \mathcal{L}\,[e^{-at}] = \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)\,t} dt = \frac{1}{s+a}$$

主なラプラス変換の性質

	時間t領域の表現 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	s領域の表現 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$
線形則	$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
相似則	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
s推移則	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
t推移則	$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
微分則	$\frac{d}{dt}f(t)$	$sF(s)-f(0)$
積分則	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)-\frac{1}{s}f'(0)$



Point!

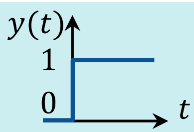
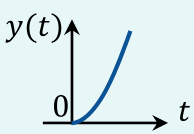
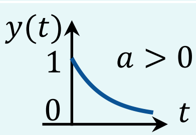
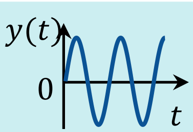
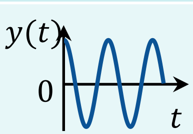
左にラプラス変換の主な性質を示します。ラプラス変換，ラプラス逆変換では，これらの性質と先程示した主なラプラス変換の式を用います。主なラプラス変換および各性質はラプラス変換の定義式から導くことができるので，各自で導出してみましょう。

$t\geq 0$で定義される時間関数 $f(t)$ の
ラプラス変換 $F(s)$ は
$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

今日のまとめ：ラプラス変換

<u>○ラプラス変換の定義式</u>　$t \geq 0$で定義される時間関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

関数の種類	応答波形	t領域の表現 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	s領域の表現 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
単位 ステップ関数		1	$\frac{1}{s}$
べき関数		t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	n=1 のときは	t	$\frac{1}{s^2}$
指数関数		e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
正弦関数		$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
余弦関数		$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

	t領域の表現 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	s領域の表現 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
線形則	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
相似則	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
s推移則	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
t推移則	$f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
微分則	$\frac{d}{dt} f(t)$	$sF(s) - f(0)$
積分則	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s) - \frac{1}{s} f'(0)$

○ラプラス変換の定義式　$t \geq 0$で定義される時間関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

← 関数$f(t)$にe^{-st}かけて
0から∞まで時間積分

例4). $f(t) = t^n$のラプラス変換

$$F(s) = \mathcal{L}\left[t^n\right] = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-st}dt = \left[t^n\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty nt^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt$$

$$= 0 + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-st}dt$$

ここで$\int_0^\infty t^n \cdot e^{-st}dt = I_n$ とおくと$F(s) = I_n = \frac{n}{s}I_{n-1}$ と表せる。

この漸化式をといて

$$I_n = \frac{n}{s}I_{n-1} = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s}I_{n-2} = \cdots = \frac{n!}{s^n} \cdot I_0 = \frac{n!}{s^n} \cdot \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$