ロボット家電と制御 第４回
古典制御の理論とラプラス変換

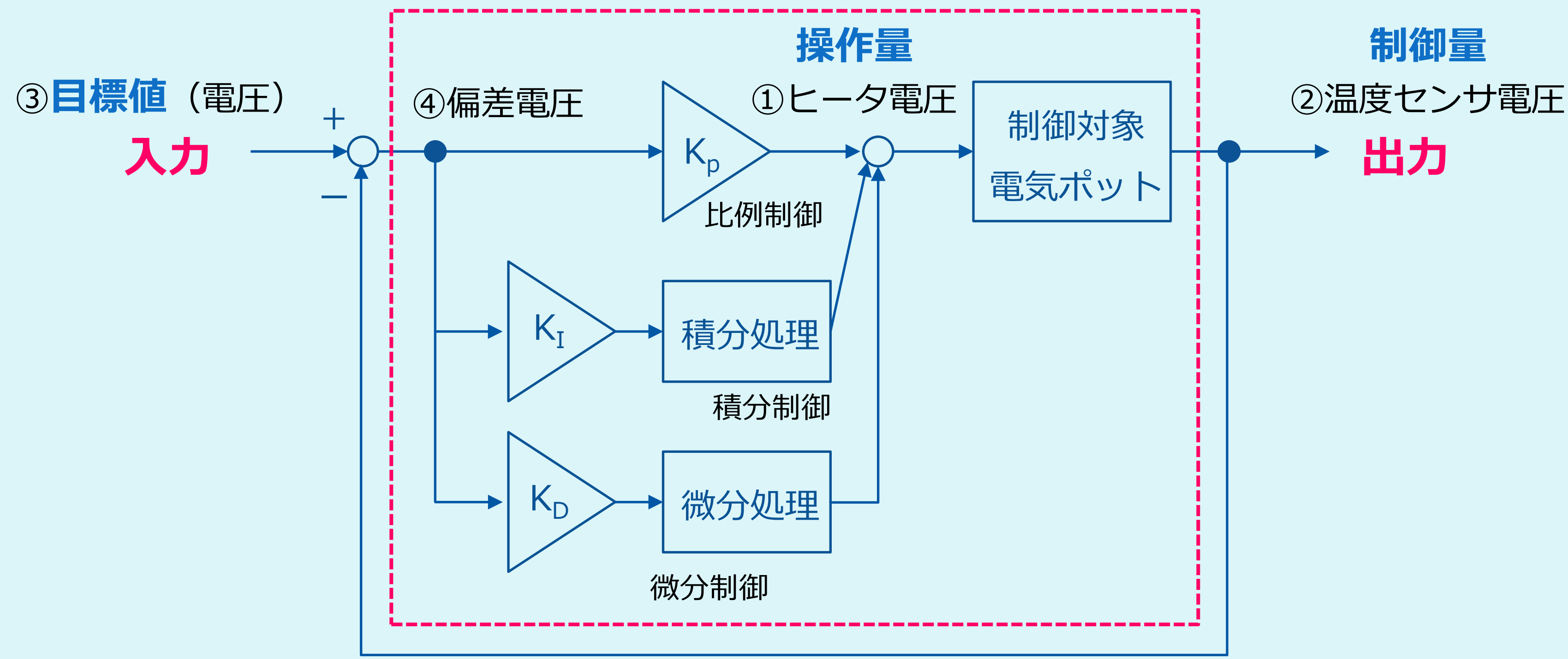
山崎 洋一

yamazaki@he.kanagawa-it.ac.jp

復習

先週の復習：PID制御

○電気ポット制御のブロック線図



比例制御に偏差の時間積分，偏差の時間微分を操作量として加えた制御を**PID制御**とよぶ。

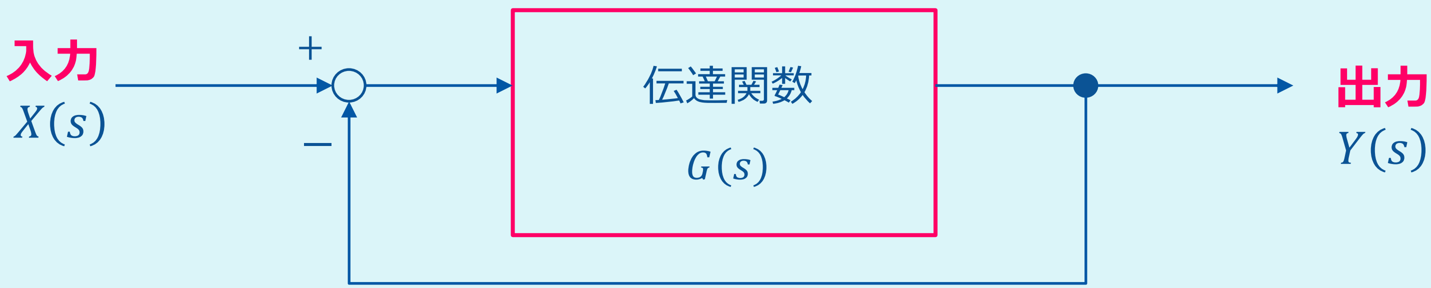
積分処理により残留偏差を制御にとりいれ，**定常偏差を小さくできる。**

微分処理により偏差の時間変化を制御に取り入れ，**急激な変化に対応できる。**

以上のように，制御対象は時間に関する微積分を含んだ式（微分方程式）で記述できる。

古典制御：

○古典制御のイメージ



$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

・**時間変化するシステムの入出力を伝達関数を用いて扱う制御**を古典制御という。

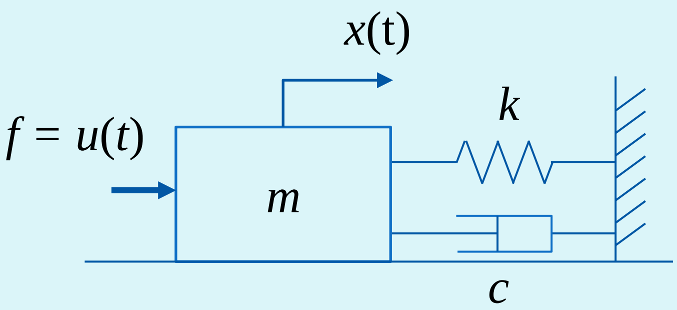
・時間変化するシステムとは時間に関する微分方程式で記述される系であり，Dynamic System（**動的システム/力学系**）とよぶ。

・伝達関数とは入力信号を出力信号に変換する関数である。

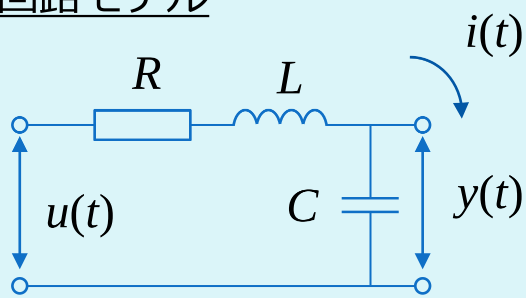
・**多くの動的システムでは，**
出力は入力に対する線形常微分方程式で表現することができる。ラプラス変換を用いることで，この常微分方程式の解を比較的カンタンに求めることができる。

Dynamic System（動的システム/力学系の例）

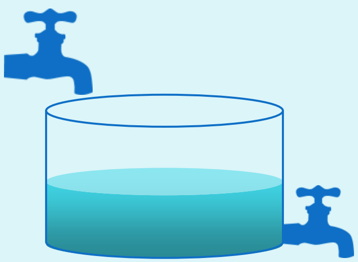
○力学モデル



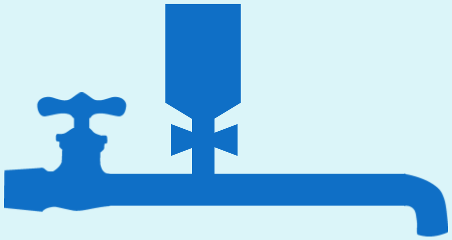
○電気回路モデル



○水位モデル



○むだ時間モデル



古典制御では下記の手順で出力を求める

・時間に関する微分方程式で記述される制御対象を**伝達関数**で示す。

↓

・ラプラス変換を利用して微分方程式を解く。

ラプラス変換の手順

○ラプラス変換のイメージ

①ラプラス変換

t関数
微分方程式

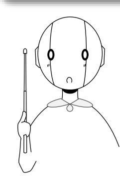
s関数
② 四則演算

③ラプラス逆変換

入力 $x(t)$ → $x(t)$と$y(t)$の微分方程式の解 → 出力 $y(t)$

入力 $X(s)$ → $G(s)$ 伝達関数 → 出力 $Y(s)=G(s)X(s)$

Point!



ラプラス変換すると，時間t領域の微分方程式を，s領域の代数方程式（四則演算）として解くことができます。

微分方程式を解くのは，一般には難しい。
（手計算で解けるものは決まってる！！）
そこで動的システムでは,
時間関数（t関数）からなる微分方程式を解く際,

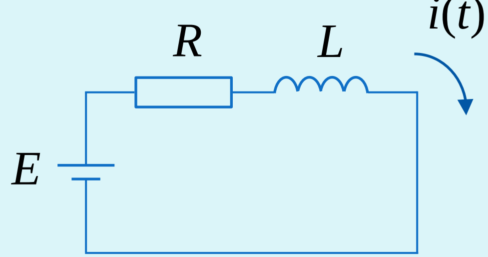
Step1: ラプラス変換という時間操作を加えて別の関数（s関数）に変換し,
Step2: s関数として伝達関数×入力を計算した結果を
Step3: ラプラス逆変換しt関数に戻して

入力に対する出力を求める。

ラプラス変換で解く手順

神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY KAIT

○RL直列回路



普通に解くと

①回路の方程式を立てる

$$E = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t)$$

②微分方程式を解く

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

ラプラス変換を
使えば

①回路の方程式を立てる
（時刻 t の関数）

$$E = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t)$$

ラプラス変換

t関数	⇔	s関数
1	⇔	$\frac{1}{s}$
$i(t)$	⇔	$I(s)$
$\frac{d}{dt}i(t)$	⇔	$sI(s)$

ラプラス逆変換

② s関数 の方程式に変換

$$\frac{E}{s} = RI(s) + LsI(s)$$

③ 四則演算を解く

$$I(s) = \frac{E}{s(Ls + R)}$$

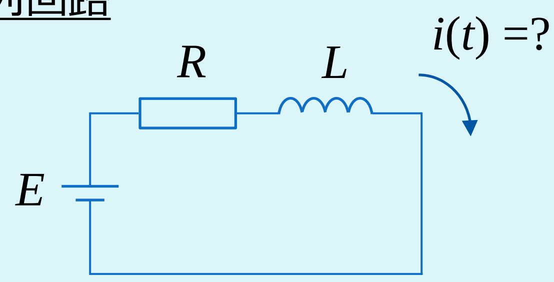
④ 解を得る

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

例題１ RL直列回路

微分方程式を解く手順

○RL直列回路



①回路の方程式を立てる

$$E = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t)$$

これを $i(t)$ について解くと

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{d}{dt}i(t)$$

これを導関数について解くと

$$\frac{d}{dt}i(t) = -\frac{R}{L}\left(i(t) - \frac{E}{R}\right)$$

となる。

ここで

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{i(t) - \frac{E}{R}}\right) = -\frac{R}{L}\left(\underline{i(t) - \frac{E}{R}}\right)$$

時間微分の前後で形をそろえる。定数は微分すればどうせ0になる。

と変形すると

１回微分すると定数が前に出てくる関数は決まってる！

$$i(t) - \frac{E}{R} = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad （A\text{は定数}）$$

という解が簡単に見つかる。

定数はいつも初期条件が決める

初期条件として時刻 $t = 0$ で $i = 0$ なので

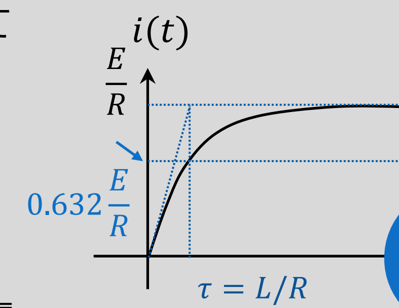
$$0 - \frac{E}{R} = Ae^{-\frac{R}{L}\times 0}$$

$$\therefore\ A = -\frac{E}{R}$$

とAが定まる。よって

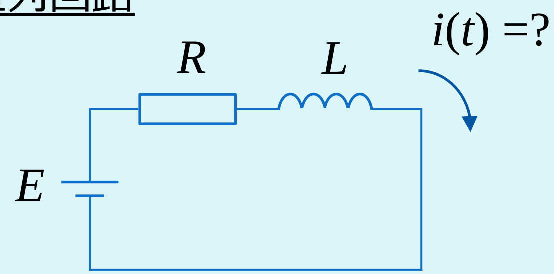
$$i(t) - \frac{E}{R} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\therefore\ i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

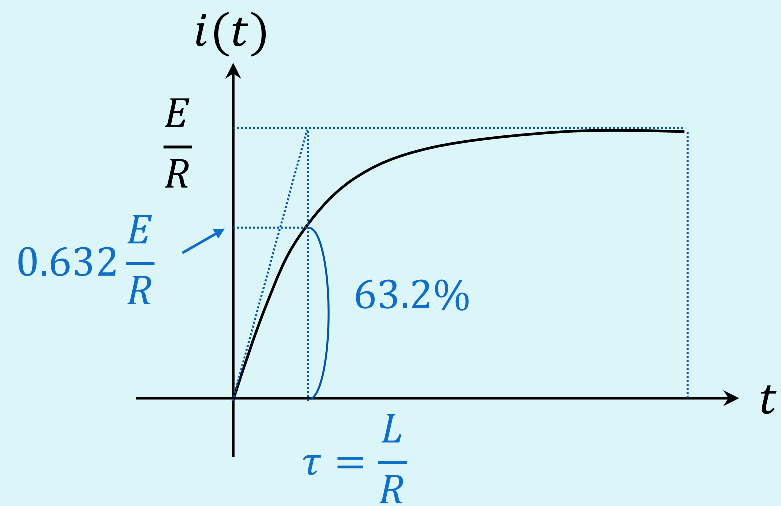


時定数τの性質

○RL直列回路



$$E = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



時定数 $\tau = \frac{L}{R}$ について考える。 $1 - \frac{1}{e} = 0.632$

性質① $t = \tau\ \left(= \frac{L}{R}\right)$ のとき, $\left(\text{または} \frac{1}{e} = 0.368\right)$ は常識！

$$i(\tau) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot\frac{L}{R}}\right) = \frac{E}{R}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \mathbf{0.632}\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}}$$

となる。

これはパラメタ同定の際に用いる数値である。

性質② $t = 0$ のときの接線を考えると,

$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{E}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$ より $\frac{d}{dt}i(0) = \frac{E}{L}$ なので

接線は $y = \frac{E}{L}t$ となる。

この $t = 0$ での接線は $t = \tau\left(= \frac{L}{R}\right)$のとき

$y = \frac{E}{L}\cdot\frac{L}{R} = \frac{E}{R}$ となり**収束値と同じ値を示す。**

ラプラス変換の手順

神奈川工科大学 KANAGAWA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

KAIT

○ラプラス変換のイメージ

①ラプラス変換

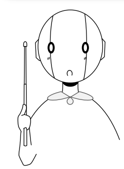
t関数	s関数
微分方程式	② 四則演算

③ラプラス逆変換

入力 $x(t)$ → $x(t)$と$y(t)$の微分方程式の解 → 出力 $y(t)$

入力 $X(s)$ → $G(s)$ 伝達関数 → 出力 $Y(s)=G(s)X(s)$

Point!



ラプラス変換すると，時間t領域の微分方程式を，s領域の代数方程式（四則演算）として解くことができます。

微分方程式を解くのは，一般には難しい。
（手計算で解けるものは決まってる！！）
そこで動的システムでは，
時間関数（t関数）からなる微分方程式を解く際，

Step1: ラプラス変換という時間操作を加えて別の関数（s関数）に変換し，
Step2: s関数として伝達関数×入力を計算した結果を
Step3: ラプラス逆変換しt関数に戻して
入力に対する出力を求める。