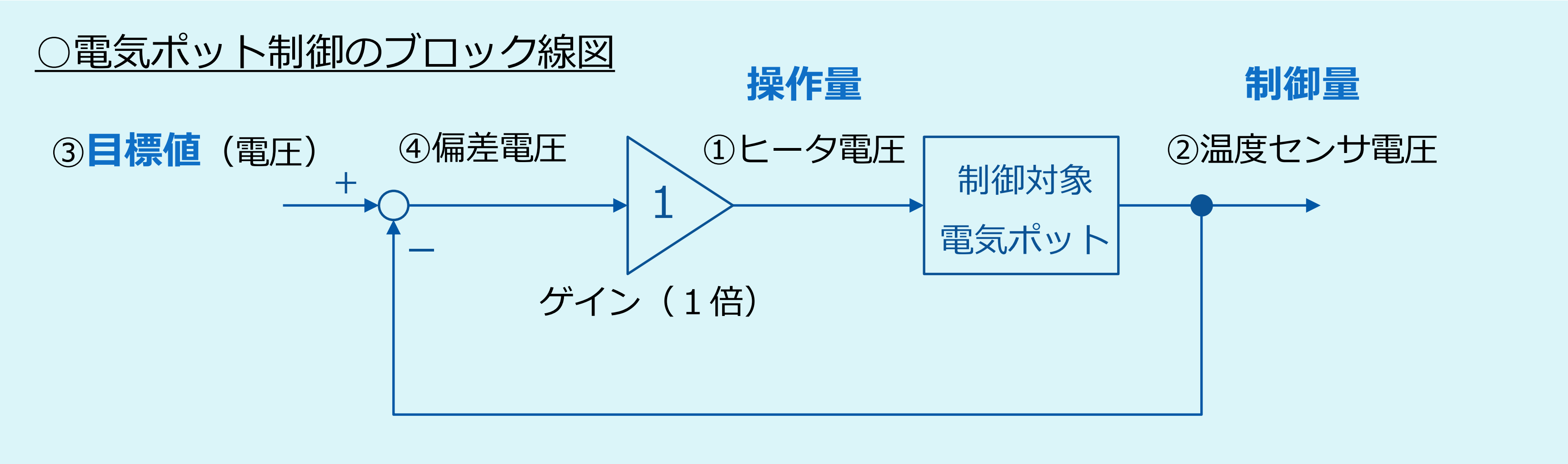
ロボット家電と制御 第３回
微分制御・積分制御

山崎 洋一
yamazaki@he.kanagawa-it.ac.jp

先週の復習： 比例制御とゲイン



(1) 比例制御(Proportional control)：
操作量が目標値と出力値（制御量）の偏差に比例するフィードバック制御。

比例制御では

ゲインを 大きくすると 応答が早いが オーバーシュート，振動が起きやすい。

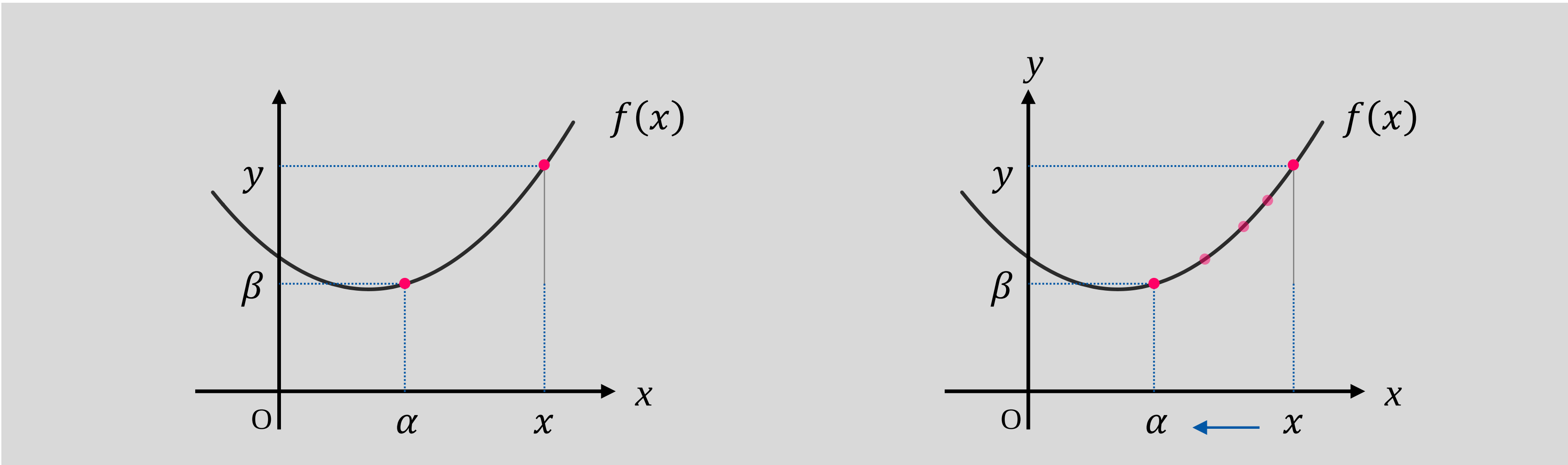
ゲインを 小さくすると オーバーシュート，振動を抑えられるが，応答が遅い。

そこで，ゲインが小さくても応答性，定常偏差を改善できる **（2）積分制御**

ゲインが大きいとき，急な偏差の変化を調整できる **（3）微分制御**

を取り上げる。

あ！極限 → “近づく”イメージ



関数 $f(x)$ において x がある定数 α に限りなく近づくとき，

$f(x)$ がある一定の値 β に近づくことを

「 $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ 」　または　「$x \to \alpha$　のとき　$f(x) = \beta$」

と表す。

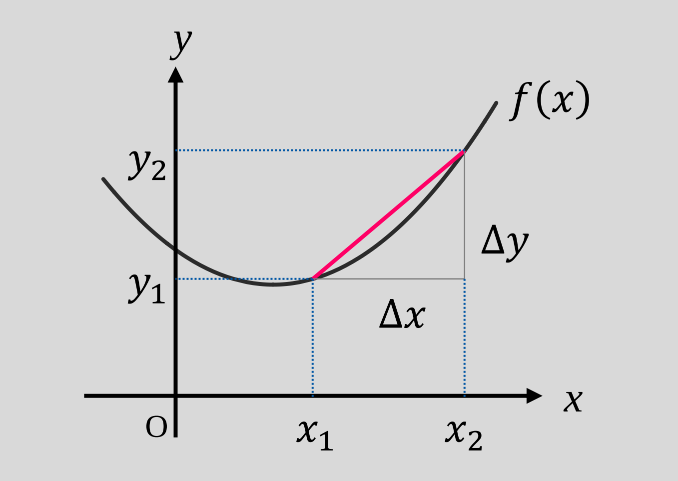
このとき，この β を極限値と呼ぶ。

あ！微分 → 接線の傾きイメージ

関数 $y = f(x)$ が x_1 から x_2 に変化したとき

$y = f(x)$ の変化率は次のように表せる。

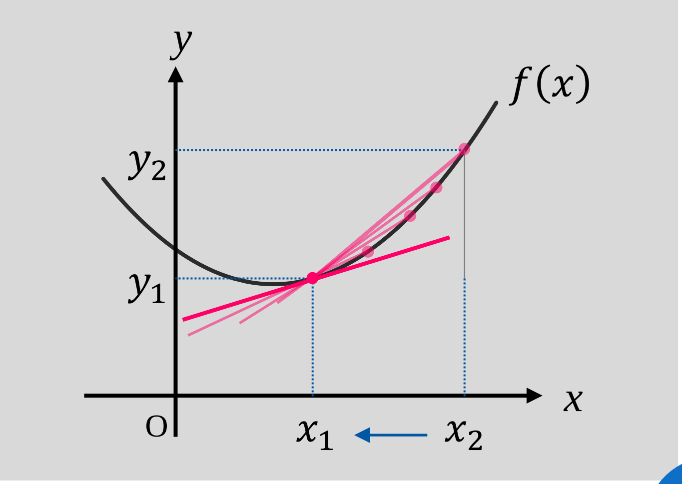
$$\text{変化率}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



ここで $x_2 \to x_1$ のとき

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x)$$

x_1 における微分係数



また $x_1 = x$， $x_2 = x + h$ とすると

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

導関数の定義

あ！積分 → 面積のイメージ（区分求積法）

関数 $y = f(x)$ と $x = a$, $x = b$ が囲む部分の面積を右図のように長方形で近似することを考える。

a から b までの長さは $b - a$ でありこれを n分割した値 Δx は次のように表せる。

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

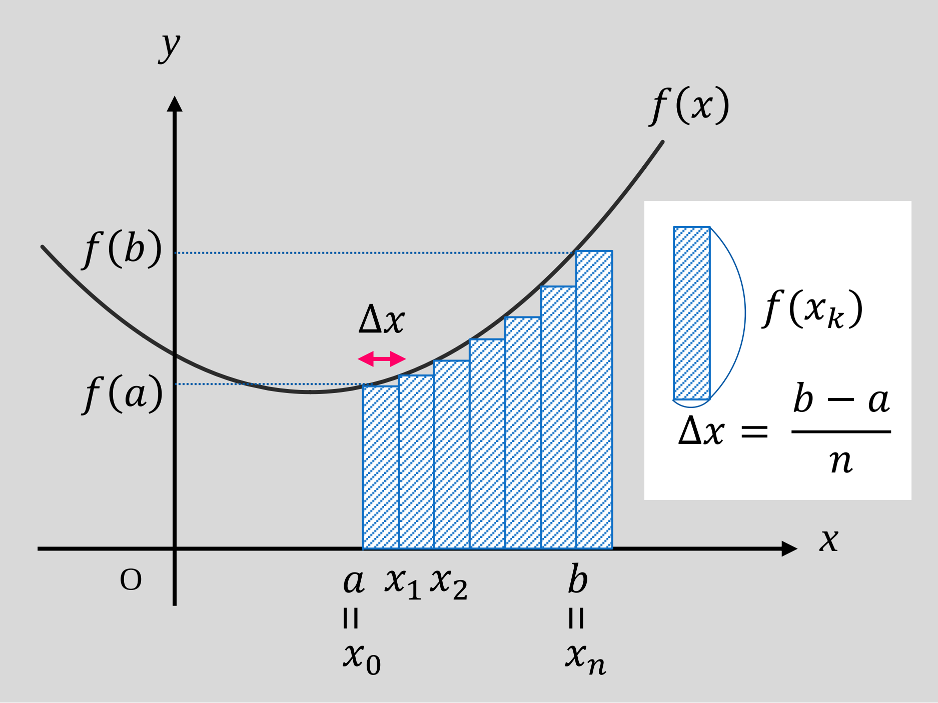
求める面積は 底辺 Δx 高さ $f(x)$ の長方形の面積を足し合わせたもので次のように近似できる。

$$\text{面積}S \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\ \Delta x \quad \text{ただし } x_k = a + k\Delta x$$

この長方形の分割数を大きくするほど，求める面積に近くなるので，n→∞のとき

$$\text{面積}S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\ \Delta x = \int_a^b f(x)dx$$ **定積分の定義**

となる。これが積分の定義である。



イメージ

Point!

定積分と微小区間の面積の足し合わせが対応

$\int_a^b$	$f(x)$	dx
↕	↕	↕
$\sum_{k=0}^{n-1}$	$f(x_k)$	Δx

（2）積分制御 ...偏差が残っている時間を制御に取り入れ定常偏差をなくす

○積分制御（I: Integral）

①目的... 定常偏差をなくす

②方法... 偏差に微小時間を掛けたものを足し合わせ

目標値 V_{input} ，センサ出力電圧 $v(t)$ とすると

右図の長方形の面積は $\left(V_{input} - v(t)\right) \Delta t$

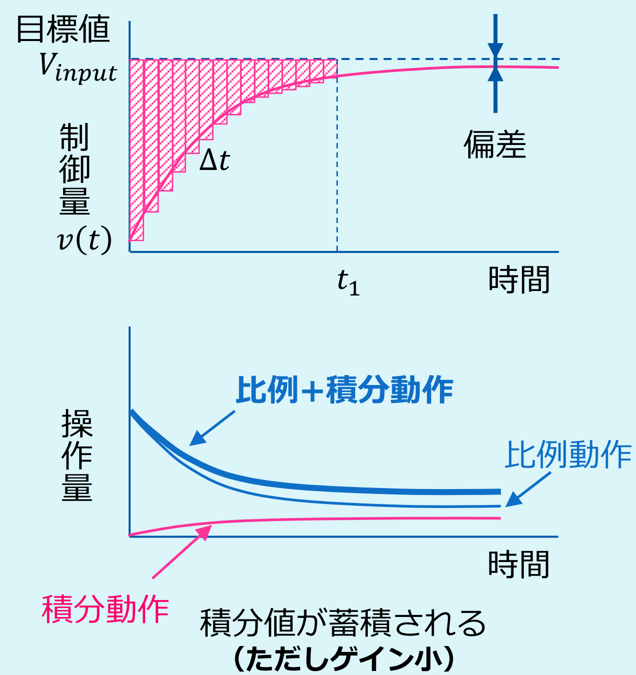
この長方形の面積が蓄積されると

$$\int_0^{t_1} \left(V_{input} - v(t)\right) dx \left(\approx \sum_{k=0}^{n-1} \left(V_{input} - v(t)\right) \Delta t \right)$$ **積分成分**

となる。これを操作量に加える。積分成分は偏差が残り続けるほど大きくなる。

比例制御に積分制御を加えたものをPI制御とよぶ。

○積分動作



（3）微分制御 …偏差の急激な変化を調整

○微分制御（D: Differential）

①目的… 外乱による急激な変化を調整

②方法… 現在と少し前の偏差を比較し差を縮める

そのためには

$$\text{偏差の変化率（傾き）} = \frac{\text{時刻 } t \text{ の偏差} - \text{時刻 } t-\Delta t \text{ の偏差}}{\text{微小な経過時間 } \Delta t}$$

$$= \frac{\left(V_{input} - v(t)\right) - \left(V_{input} - v(t-\Delta t)\right)}{\Delta t}$$

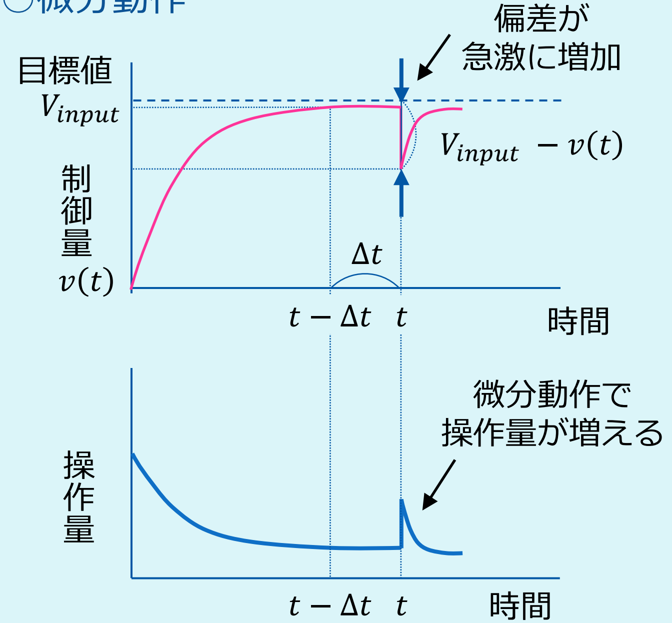
$$= -\frac{v(t) - v(t-\Delta t)}{\Delta t} \quad \textbf{微分成分}$$

を考慮し、変化を打ち消すように操作量に加えればよい。

比例制御に微分制御を加えたものをPD制御

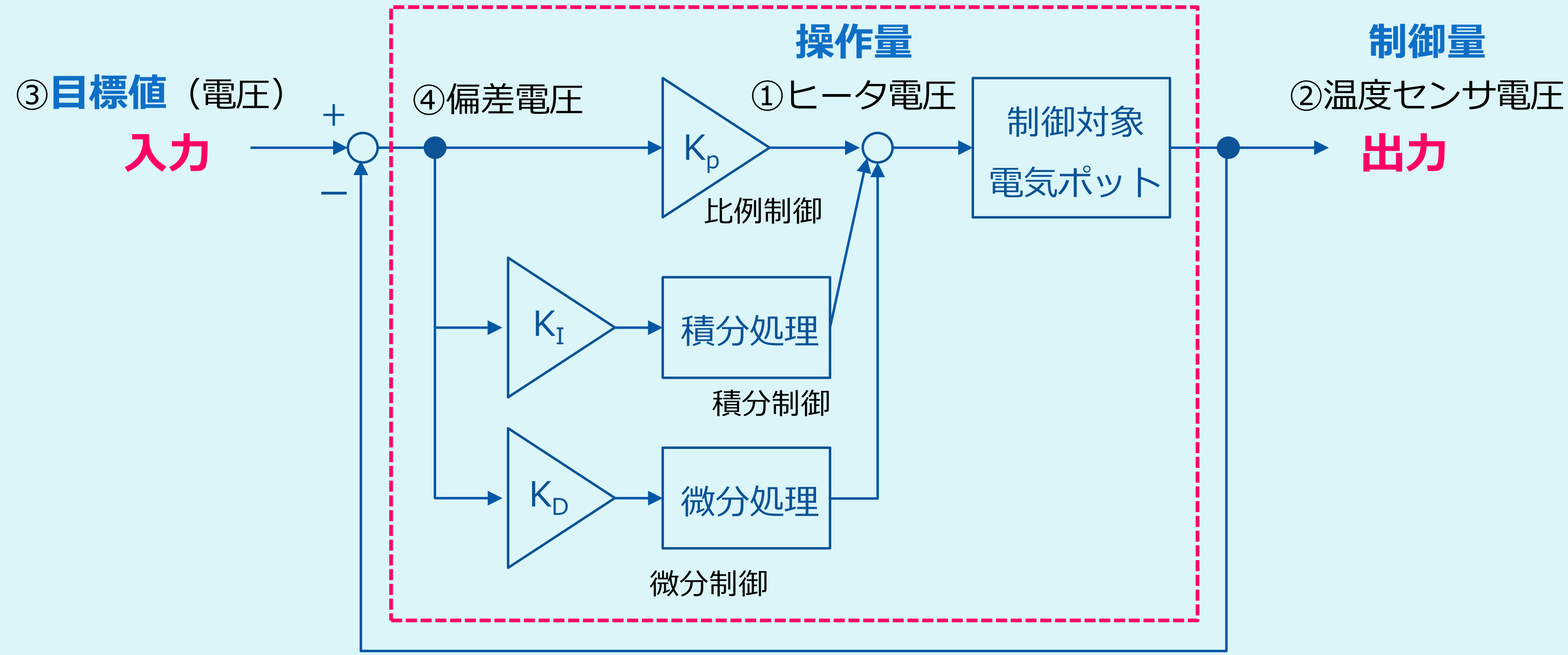
PI制御に微分制御を加えたものをPID制御とよぶ。

○微分動作



PID制御

○電気ポット制御のブロック線図



比例制御に偏差の時間積分，偏差の時間微分を操作量として加えた制御を**PID制御**とよぶ。

積分処理により残留偏差を制御にとりいれ，**定常偏差を小さくできる。**

微分処理により偏差の時間変化を制御に取り入れ，**急激な変化に対応できる。**

以上のように，制御対象は時間に関する微積分を含んだ式（微分方程式）で記述できる。