

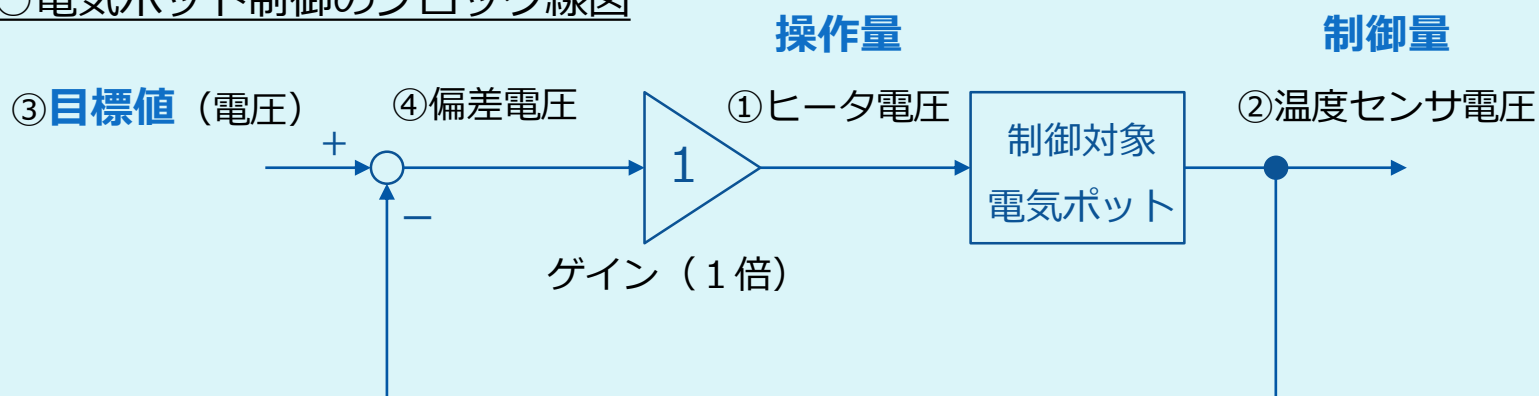
ロボット家電と制御 第3回

微分制御・積分制御

山崎 洋一

yamazaki@he.kanagawa-it.ac.jp

○電気ポット制御のブロック線図



(1) 比例制御(Proportional control) :

操作量が目標値と出力値 (制御量) の偏差に比例するフィードバック制御。

比例制御では

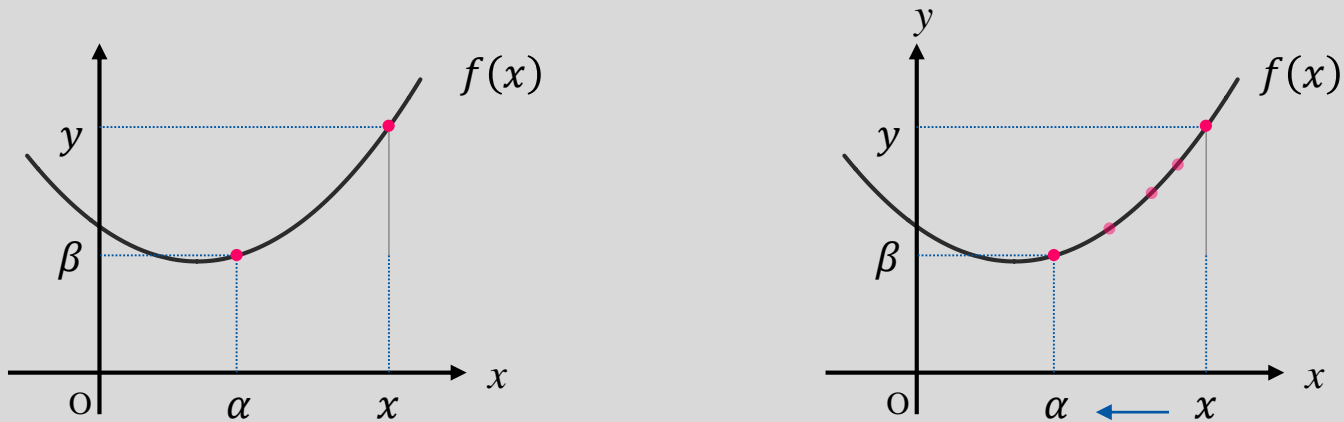
ゲインを大きくすると応答が早いですがオーバーシュート、振動が起きやすい。

ゲインを小さくするとオーバーシュート、振動を抑えられるが、応答が遅い。

そこで、ゲインが小さくても応答性、定常偏差を改善できる (2) 積分制御

ゲインが大きいとき、急な偏差の変化を調整できる (3) 微分制御

を取り上げる。



関数 $f(x)$ において x がある定数 α に限りなく近づくとき,

$f(x)$ がある一定の値 β に近づくことを

$$\left[\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta \right] \quad \text{または} \quad \left[x \rightarrow \alpha \text{ のとき } f(x) = \beta \right]$$

と表す。

このとき, この β を極限值と呼ぶ。

あ！微分 → 接線の傾きイメージ

関数 $y = f(x)$ が x_1 から x_2 に変化したとき
 $y = f(x)$ の変化率は次のように表せる。

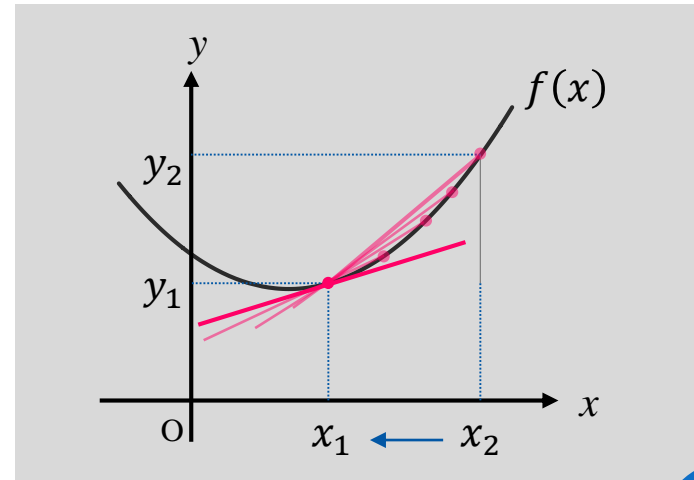
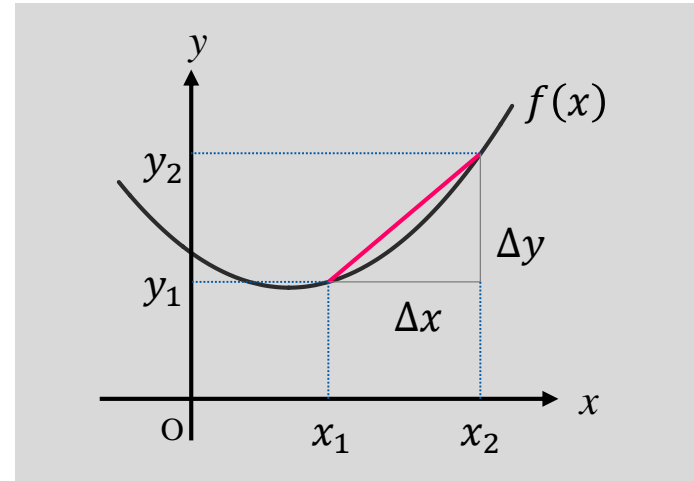
$$\text{変化率} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ここで $x_2 \rightarrow x_1$ のとき

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x) \quad x_1 \text{ における微分係数}$$

また $x_1 = x$, $x_2 = x + h$ とすると

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{導関数の定義}$$



あ！積分 → 面積のイメージ（区分求積法）

関数 $y = f(x)$ と $x = a, x = b$ が囲む部分の面積を右図のように長方形で近似することを考える。

a から b までの長さは $b - a$ でありこれを n 分割した値 Δx は次のように表せる。

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

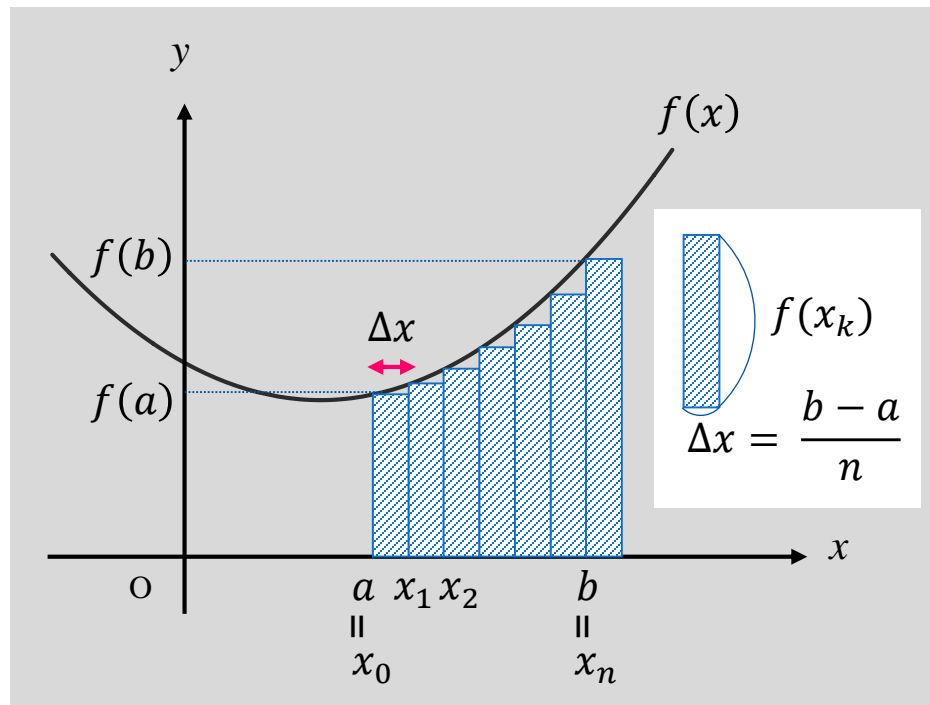
求める面積は底辺 Δx 高さ $f(x)$ の長方形の面積を足し合わせたもので次のように近似できる。

$$\text{面積} S \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x \quad \text{ただし } x_k = a + k\Delta x$$

この長方形の分割数を大きくするほど、求める面積に近くなるので、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\text{面積} S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \quad \text{定積分の定義}$$

となる。これが積分の定義である。



イメージ



定積分と微小区間の面積の足し合わせが対応

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x$$

Red double-headed arrows connect the two equations, indicating the correspondence between the integral and the sum of rectangles.

(2) 積分制御 ...偏差が残っている時間を制御に取り入れ定常偏差をなくす

○積分制御 (I: Integral)

- ①目的... 定常偏差をなくす
- ②方法... 偏差に微小時間を掛けたものを足し合わせ

目標値 V_{input} , センサ出力電圧 $v(t)$ とすると

右図の長方形の面積は $(V_{input} - v(t)) \Delta t$

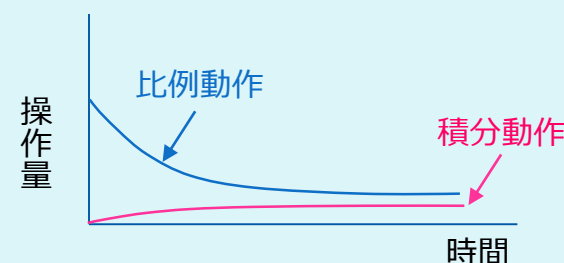
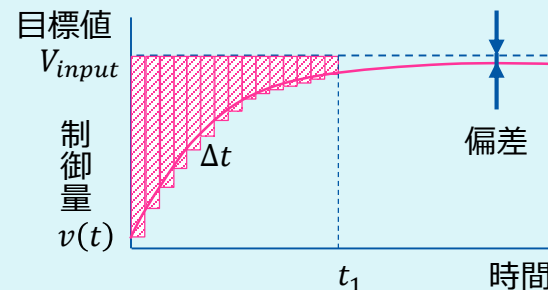
この長方形の面積が蓄積されると

$$\int_0^{t_1} (V_{input} - v(t)) dx \left(\approx \sum_{k=0}^{n-1} (V_{input} - v(t)) \Delta t \right) \quad \text{積分成分}$$

となる。これを制御量に加える。積分成分は偏差が残
り続けるほど大きくなる。

比例制御に積分制御を加えたものをPI制御とよぶ。

○積分動作



(3) 微分制御 ...偏差の急激な変化を調整

○微分制御 (D: Differential)

- ①目的... 外乱による急激な変化を調整
- ②方法... 現在と少し前の偏差を比較し差を縮める

そのためには

偏差の変化率 (傾き) = $\frac{\text{時刻 } t \text{ の偏差} - \text{時刻 } t - \Delta t \text{ の偏差}}{\text{微小な経過時間 } \Delta t}$

$$= \frac{(V_{input} - v(t)) - (V_{input} - v(t - \Delta t))}{\Delta t}$$

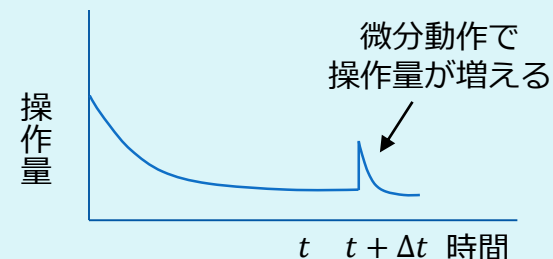
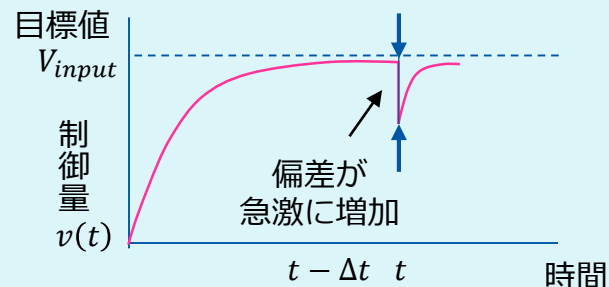
$$= \frac{v(t - \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad \text{微分成分}$$

を考慮し変化を打ち消すように制御量に加えればよい。

比例制御に微分制御を加えたものをPD制御

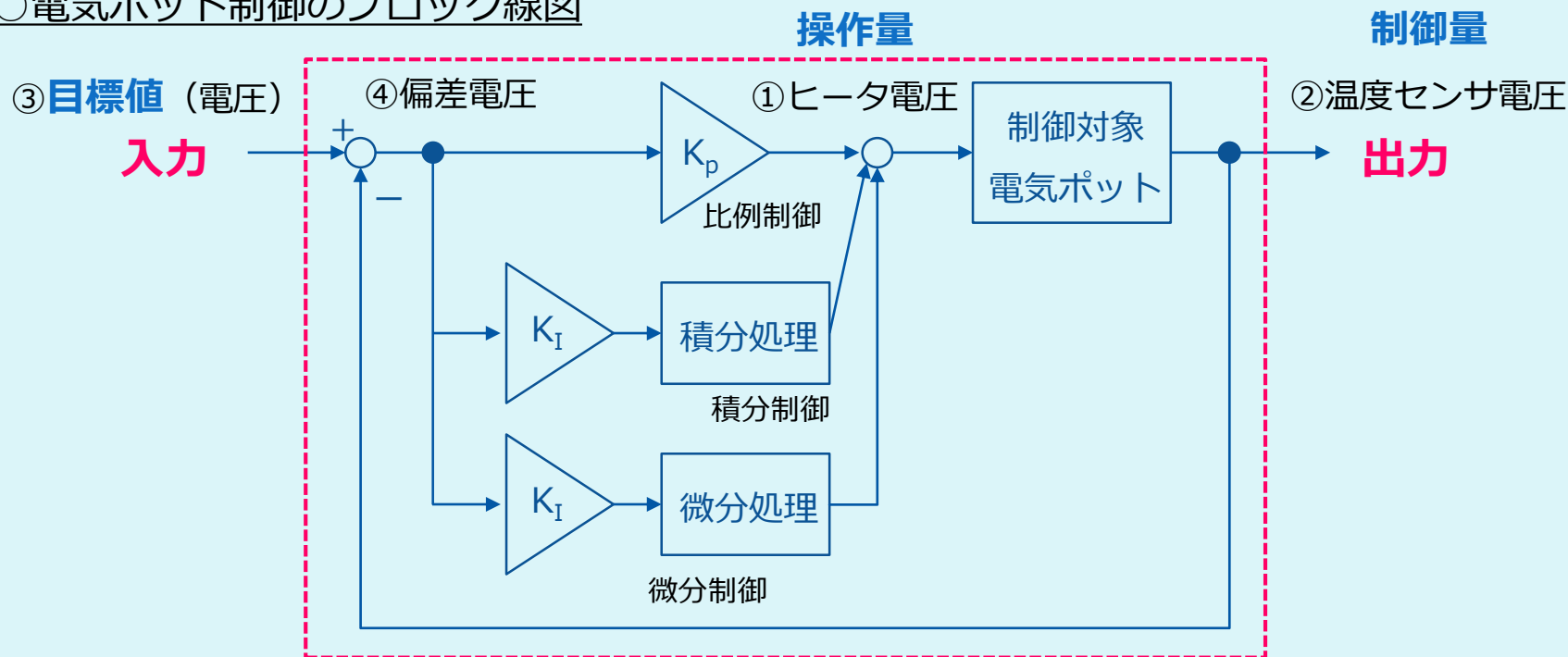
PI制御に微分制御を加えたものをPID制御とよぶ。

○微分動作



PID制御

○電気ポット制御のブロック線図



比例制御に偏差の時間積分，偏差の時間微分を操作量として加えた制御を**PID制御**とよぶ。

積分処理により残留偏差を制御量にとりいれ，**定常偏差を小さくできる。**

微分処理により偏差の時間変化を制御量に取り入れ，**急激な変化に対応できる。**

以上のように，制御対象は時間に関する微積分を含んだ式（微分方程式）で記述できる。