担当：ホームエレクトロニクス開発学科　山崎洋一

メカトロニクスの基礎　材料力学編

はじめに

　製品を設計するときに重要なポイントはなんであろうか。機能を実現することは，もちろん重要である。それと同様に，使用した際に壊れないことも重要になる。丈夫な形状を適切なコストで実現するために必要になる知識が，材料力学であり，材料工学である。
　本講義では，材料力学の基礎として，製品，構造物に対して①どのような力が働くのか（1．荷重），②内部にどのような抵抗力が生じるか（2．内力， 3．応力），その結果，③どんな変形が起こるか（4．ひずみ）を学んでいく。

1. 荷重(load)　…… 物体に働く外力。

　物体に働く外力を荷重とよぶ。荷重の分類として，荷重の作用のしかたによる分類 (1.1) と荷重を加える速度による分類（1.2）の 2 種類の分類を次に示す。荷重の分類をイメージするには，実際に試してみるのがわかりやすい。是非，消しゴムを手元に用意し，次に示す各荷重を実際に試してみて欲しい。(消しゴムは破断してしまかもしれないが，数十円で一生使える荷重と破断のイメージが手に入ると思えばお得であろう。)

1.1 荷重の作用のしかたによる分類

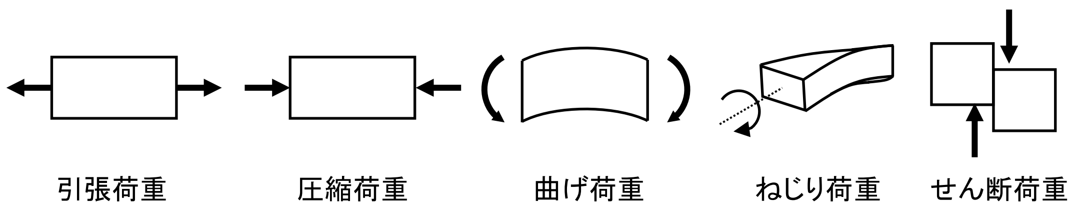


図 1.1. 作用のしかたによる荷重の分類

作用のしかたによる荷重の分類を図 1.1 に示す。手元に用意している（であろう）消しゴムにたいして，引張る，押し縮める（つぶす)，曲げる，ねじる，断ち切る（せん断する）のすべてを試してみて欲しい。

1.2 荷重を加える速度による分類

　次に，荷重を加える速度による分類を示す。大きく分けて，静荷重と動荷重の 2 種類に分類される。
　①　静荷重 … 徐々に加える or 加え続ける荷重。
　②　動荷重 … 変化を伴う荷重。動荷重には次のようなものがある。

(i)　繰り返し荷重 … 大きさが周期的に変動して繰り返される荷重。
(ii) 交番荷重 … 大きさと向きが周期的に変動して繰り返される荷重。
(iii) 衝撃荷重 … 急激に作用する荷重。

2. 内力(internal force) …… 物体が荷重を受けたとき，それに応じて内部に生じる抵抗力。
例） 図 2.1 のように丸棒に 150[N]の引張荷重を加える。このとき，丸棒の内部に生じる内力はどうなるか。

図 2.1. 丸棒に引張荷重を加えたときの内力

解） 大きさ 150N で，向きは荷重と反対方向となる。
　内力は物体の内部のいかなる場所でも生じている。その一例としてある仮想断面に内力が生じている様子を図 2.1 の右図に示す。

3. 応力(stress) …… 単位断面積当たりの内力の大きさ。
　応力は次のように求められる。

$$\boxed{\text{応力} = \frac{\text{内力}}{\text{断面積}} = \frac{\text{荷重}}{\text{断面積}}}$$

3.1 応力の考え方
例） 図 3.1 のようにサイズの異なる 2 本の角棒に等しい引張荷重 W を加える。このとき，応力はどちらが大きくなるか。

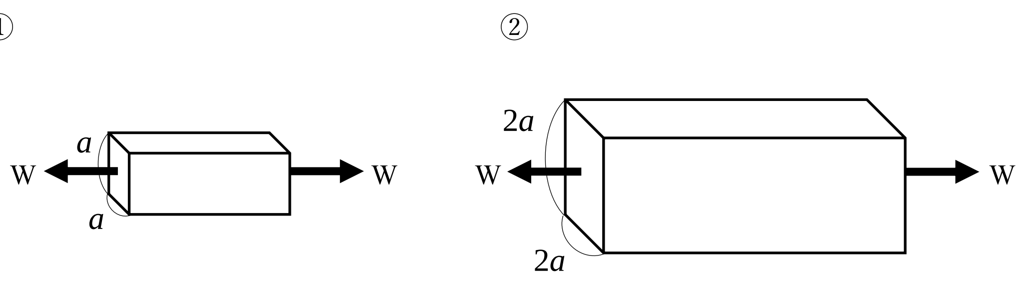


図 3.1. 角棒に引張荷重を加えたときの応力

解） 応力は,

$$応力 = \frac{内力}{断面積} = \frac{荷重}{断面積}$$

で求められるので,

$$\left.\begin{aligned} ①の応力\sigma_1 &= \frac{\mathrm{W}}{a^2} \\ ②の応力\sigma_2 &= \frac{\mathrm{W}}{4a^2} \end{aligned}\right\} \quad \therefore\ \sigma_1 = 4\sigma_2$$

となる。つまり，細い角棒①の方には太い角棒②の 4 倍の大きな応力が生じていることがわかる。**応力は材料の強さの指標として用いることができる。**応力を考えることにより安全に使用できる寸法，形状，数量を知ることができる。

3.2 応力の単位：[Pa] (パスカル)

$$\frac{荷重\ \mathrm{W}\ [\mathrm{N}]}{断面積\ \mathrm{A}\ [m^2]} = 応力\sigma \left[\frac{\mathrm{N}}{m^2}\right] = \sigma\ [\mathrm{Pa}] \qquad [\sigma \ldots シグマ]$$

とする。つまり　$1\ [\mathrm{N}/m^2] = 1\ [\mathrm{Pa}]$

となる。

ここで，材料力学，機械工学では面積を$[mm^2]$とすることを考慮すると

$$1\ [\mathrm{N}/mm^2] = \frac{1\ [\mathrm{N}]}{1\ [mm^2]} = \frac{1\ [\mathrm{N}]}{10^{-6}\ [m^2]} = 1 \times 10^6 \left[\frac{\mathrm{N}}{m^2}\right] = 1 \times 10^6 [\mathrm{Pa}] = 1[\mathrm{MPa}]$$

$$\therefore\ \boxed{1\ [\mathrm{N}/mm^2] = 1[\mathrm{MPa}]}$$

となる。つまり，**応力を求める際は，荷重を[N]，寸法を[mm]の単位で計算すると，つねに[MPa]の単位で応力を求めることができ**，計算が単純になる。

$$\boxed{\textbf{応力}\sigma = \frac{\textbf{荷重}\ \mathrm{W}\ [\mathrm{N}]}{\textbf{断面積}\ \ \mathrm{A}\ [mm^2]} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}}\ [\mathrm{MPa}]}$$

3.3 応力の種類 … 荷重の作用のしかたで分類する。

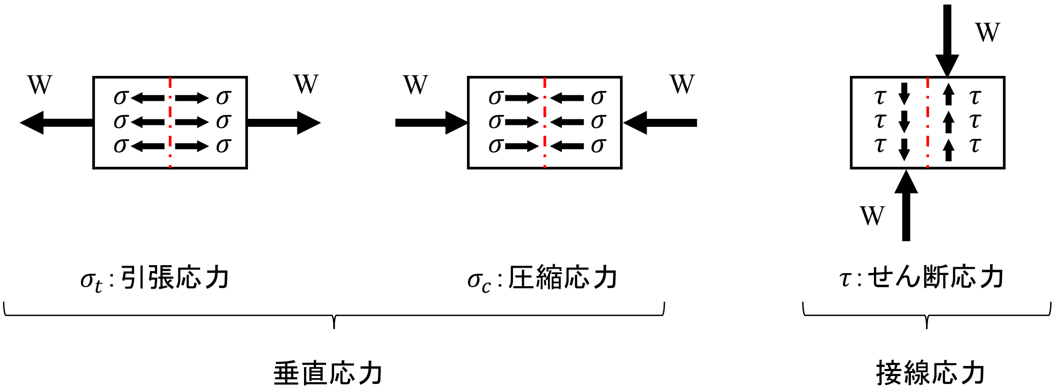


図 3.2. 応力の分類

図 3.2 に示すように応力の種類は荷重の作用のしかたによって分類される。本講では，その中でもとくに基本的なものを扱う。本講で扱う応力を図 1.4 に示す。

荷重W [N]，断面積A $[mm^2]$とすると

$$\begin{cases} \text{垂直応力}\sigma = \dfrac{\mathrm{W}\ [\mathrm{N}]}{\mathrm{A}\ [\mathrm{m}^2]} = \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}}\ [\mathrm{MPa}] \\ \\ \text{せん断応力}\tau = \dfrac{\mathrm{W}\ [\mathrm{N}]}{\mathrm{A}\ [\mathrm{m}^2]} = \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}}\ [\mathrm{MPa}] \end{cases} \qquad [\tau \ldots \text{タウ}]$$

となる。引張応力と圧縮応力を区別する場合は，それぞれσ_tとσ_cを用いる。

例題 1）図 3.3 のように角棒に引張荷重 W を与えたとき断面に生じる応力を求めよ。

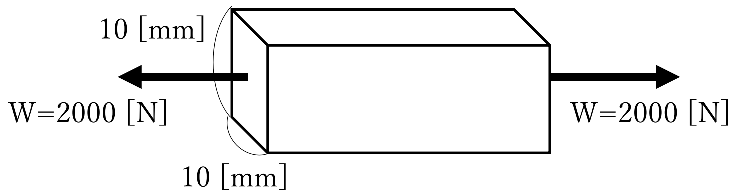


図 3.3. 角棒に引張荷重を加えたときの応力

解き方）

STEP 1 断面積を求める。

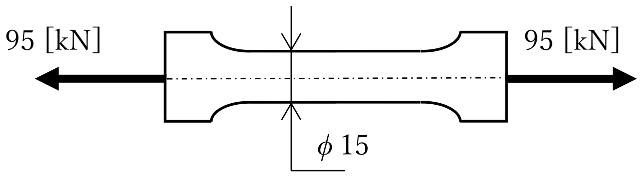
$$\text{断面積}\ A = 10 \times 10 = 100\ [\mathrm{mm}^2]$$

STEP 2 荷重を断面積で割って応力を求める。

$$\text{引張荷重 W} = 2000\ [\mathrm{N}]$$

$$\text{よって}\quad \text{引張応力}\ \sigma = \frac{\text{引張荷重 W}}{\text{断面積 A}} = \frac{2000[\mathrm{N}]}{100[\mathrm{mm}^2]} = 20\ [\mathrm{N/mm}^2] = \underline{\underline{20\ [\mathrm{MPa}]}}$$

例題 2）図 3.4 に示す軟鋼材料で引張試験を行った結果，最大荷重が 95[kN]であった。
このとき生じた引張応力を求めなさい。ただし有効数字 3 桁とする。



ϕ[ファイ]…直径記号
例）ϕ 14 …直径 14mm

図 3.4. 引張試験

解き方）

STEP 1 断面積を求める。

$$\text{断面積}A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}\ [\mathrm{mm}^2]$$

STEP 2 荷重を断面積で割って応力を求める。

引張荷重 W ＝95 [kN]

よって　$\text{引張応力}\sigma = \frac{\text{引張荷重 W}}{\text{断面積 A}} = \frac{\mathrm{W}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4\mathrm{W}}{\pi d^2} = \frac{4\times 95\times 10^3}{\pi\times 15^2} = \frac{4\times 95\times 10^3}{\pi\times 15^2} = 537.59 = \underline{\underline{538\ [\mathrm{MPa}]}}$

例題 3）図 3.5 のように M10 のボルトに 2.2[kN]のせん断力がかかっている。ボルトに生じるせん断応力を求めよ。ただし有効数字 3 桁とする。

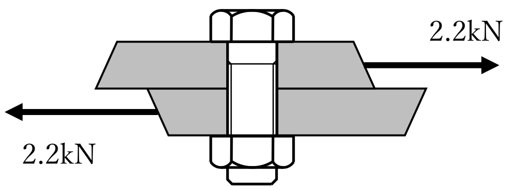


図 3.5. ボルトとナットによる締結

解き方）

$$\text{せん断応力}\tau = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}} = \frac{4\mathrm{W}}{\pi d^2} = \frac{4\times 2.2\times 10^3}{\pi\times 10^2} = 28.01 = \underline{\underline{28.0\ [\mathrm{MPa}]}}$$

※実際の設計計算では**ボルトの外径ではなく有効径を用いて計算する**。M10 のボルトであれば有効径は 9.026[mm]なので，せん断応力はこれよりも大きくなる。

例題 4）下図のようにリベット継手に 10[kN]の引張荷重が作用するとき，リベットに生じるせん断応力を 20[MPa]以下にしたい。リベットは最低何本必要か。ただし用いるリベットは$\phi 5$とする。

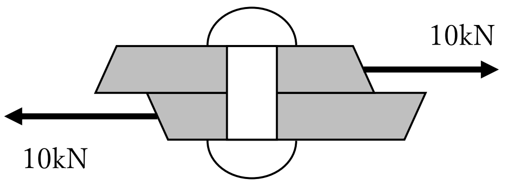


図 3.6. リベット継手

<考え方>　せん断応力を考えるときは“断面の数”に着目して考えるのがポイント。リベットをn本としたときの総断面積を考えて応力を求める。

解き方）

STEP 1　リベットの本数をn本とすると，

$$\text{n 本のリベットの総断面積} A = \mathrm{n} \cdot \frac{\pi d^2}{4}\ [\mathrm{mm}^2]$$

STEP 2　1本当たりのリベットに生じるせん断応力を 20[MPa]にしたいので

$$\text{せん断応力} \tau = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{W}}{\frac{\mathrm{n}\pi d^2}{4}} = \frac{4\mathrm{W}}{\mathrm{n}\pi d^2} \leq 20[\mathrm{MPa}]$$

STEP 3　これをnについての不等式の形にすると

$$\mathrm{n} \geq \frac{4\mathrm{W}}{20\pi d^2} = \frac{4 \times 10 \times 10^3}{20 \times \pi \times 5^2} = 25.46$$

n は 25.46 以上の最小の整数なので，最低 26 本必要となる。
※25.46を四捨五入したのではない点に注意すること。

4. ひずみ（strain）……　物体に荷重を加えたときに生じる変形を割合で表したもの。
　物体に荷重を加えると，荷重の状態に応じて伸びや縮み，ずれなどの変形を生じる。
このとき，

物体の変形前の寸法に対する変形量の割合

を，**ひずみ ε** という。　　　　[ε … **イプシロン**]

※ ひずみの単位について
　ひずみは割合（比）なので無次元であり単位がない。しかし，ひずみであることを示すために数字の後に ST(strain)や **ε** をつけることがある。また値が小さいため%（百分率）やμ（1×10^{-6}）のオーダで扱われることがある。

4.1　ひずみの種類

ひずみには縦ひずみ，横ひずみ，せん断ひずみなどがある。

4.2　ひずみの計算

4.2.1 縦ひずみ

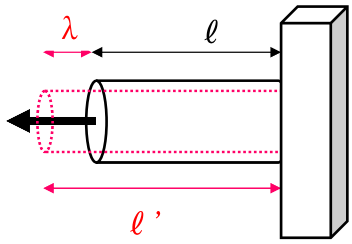
…… 材料に軸方向に荷重が作用するとき，**変形前の長さに対する軸方向の変形量の割合を縦ひずみ**とよび，下記のように表す。

$$\text{縦ひずみ}\ \varepsilon = \frac{\text{変形量}\ \lambda}{\text{変形前の長さ}\ \ell} \qquad [\lambda \ldots \text{ラムダ}]$$

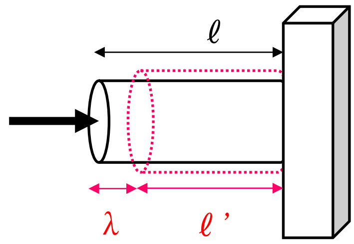
縦ひずみを求める際，引張り時は伸びを，圧縮時は縮みを考える必要がある。

具体例として，下図のように材料に軸方向に荷重が作用するときの縦ひずみを示す。

<引張り>



<圧縮>



○引張り時

$$\begin{cases} \text{伸び}\ \lambda = \ell' - \ell \\ \text{縦ひずみ}\ \varepsilon = \frac{\lambda}{\ell} = \frac{\ell' - \ell}{\ell} \end{cases}$$

○圧縮時

$$\begin{cases} \text{縮み}\ \lambda = \ell - \ell' \\ \text{縦ひずみ}\ \varepsilon = \frac{\lambda}{\ell} = \frac{\ell - \ell'}{\ell} \end{cases}$$

図 4.1. 縦ひずみ

例題 5) 長さ 400[mm]の材料が引張荷重を受けて 1[mm]伸びた。縦ひずみはいくらか。

解き方）

$$\text{縦ひずみ}\ \varepsilon = \frac{\lambda}{\ell} = \frac{1\ \ [\mathrm{mm}]}{400\ [\mathrm{mm}]} = 0.0025 \qquad \therefore \underline{\underline{\varepsilon = 0.0025\ \ (\varepsilon = 0.25\%,\ 2500 \times 10^{-6})}}$$

例題 6) 長さ 2[m]の材料が圧縮荷重を受けて 0.0002 の縦ひずみを生じた。縮みはいくらか。

解き方）

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\ell} \quad \text{より}\ \ \lambda = \varepsilon\ell = 0.0002 \times 2000\ [\mathrm{mm}] = 0.4\ [\mathrm{mm}] \qquad \therefore \underline{\underline{\lambda = 0.4\ [\mathrm{mm}]}}$$

例題 7) 伸びが 0.6[mm]，ひずみが 0.0003 であるとき，変形前の長さはいくらか。

解き方）

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda}{\ell} \quad \text{より} \quad \ell = \frac{\lambda}{\mathcal{E}} = \frac{0.6\,[\mathrm{mm}]}{0.0003} = 2000\ [\mathrm{mm}] \qquad \therefore \ell = 2000\ [mm]$$

例題 8) 長さ ℓ の丸棒を圧縮したところ，長さが 200[mm]，ひずみが 0.005 になった。変形前の長さ ℓ はいくらか。

解き方）

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda}{\ell} = \frac{\ell - \ell'}{\ell} \qquad \therefore \ell\mathcal{E} = \ell - \ell'$$

$$\therefore (\mathcal{E} - 1)\ell = -\ell'$$

$$\therefore \ell = \frac{-\ell'}{\mathcal{E} - 1} = \frac{\ell'}{1 - \mathcal{E}} = \frac{200}{1 - 0.005} = 201.00 = 201[\mathrm{mm}]$$

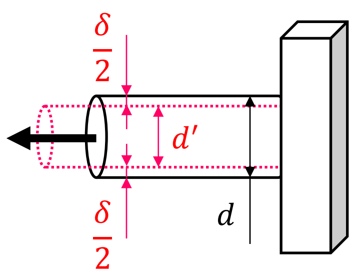
4.2. 2　横ひずみ　……　材料に軸方向に荷重が作用するとき，**変形前の直径に対する直径の変形量の割合**を**横ひずみ**とよび，下記のように表す。

$$\text{横ひずみ}\mathcal{E}' = \frac{\text{直径の変形量}\ \delta}{\text{変形前の直径 d}} \qquad [\delta \ldots \text{デルタ}]$$

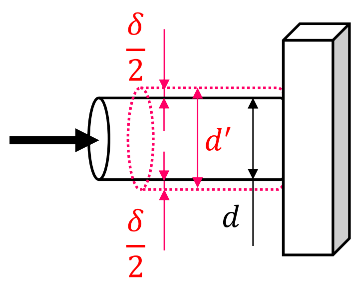
横ひずみを求める際は縦ひずみのときと同様に，引張り時は伸びを，圧縮時は縮みを考える必要がある。

具体例として，下図のように材料に軸方向に荷重が作用するときの横ひずみを示す。

<引張り>



<圧縮>



○引張り時

$$\begin{cases} \text{直径の縮み}\ \delta = \mathrm{d} - \mathrm{d}' \\ \text{横ひずみ}\mathcal{E}' = \frac{\delta}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{d} - \mathrm{d}'}{\mathrm{d}} \end{cases}$$

○圧縮時

$$\begin{cases} \text{直径の伸び}\ \delta = \mathrm{d}' - \mathrm{d} \\ \text{横ひずみ}\mathcal{E}' = \frac{\delta}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{d}' - \mathrm{d}}{\mathrm{d}} \end{cases}$$

図 4.2. 横ひずみ

例題 9）直径 30[mm]の丸棒に引張荷重を作用させたところ直径が 0.0045[mm]縮んだ。横ひずみはいくらか。

解き方）

$$\text{横ひずみ}\varepsilon' = \frac{\delta}{d} = \frac{0.0045[\mathrm{mm}]}{30\ [\mathrm{mm}]} = 0.00015 \quad \therefore \underline{\underline{\varepsilon' = 0.00015 \ \ (\varepsilon' = 0.015\%,\ \ 150 \times 10^{-6})}}$$

例題 10）直径 25[mm]の丸棒が圧縮荷重を受け，直径が 0.005 [mm]増加した。横ひずみはいくらか。

解き方）

$$\text{横ひずみ}\varepsilon' = \frac{\delta}{d} = \frac{0.005[\mathrm{mm}]}{25\ [\mathrm{mm}]} = 0.0002 \quad \therefore \underline{\underline{\varepsilon' = 0.0002 \ \ (\varepsilon' = 0.02\%,\ \ 200 \times 10^{-6})}}$$

4.2.3 せん断ひずみ　…… 材料にせん断荷重が作用するとき，**高さ ℓ に対するずれ λ_s の割合をせん断ひずみ**とよび，下記のように表す。

$$\text{せん断ひずみ}\ \gamma = \frac{\text{変形量}\ \lambda_s}{\text{高さ}\ \ell}$$

具体例として，下図のように材料にせん断荷重 W が作用するときのせん断ひずみを考える。

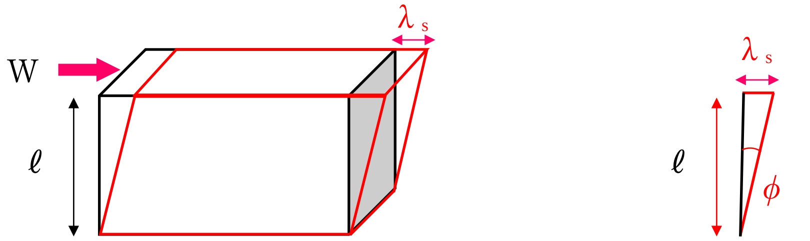


図 4.3. せん断ひずみ

荷重をかける前から変形した角度を ϕ とすると，せん断荷重により生じるずれ λ_s は

$$\lambda_s = \ell \tan\phi$$

となる。よって

$$\text{せん断ひずみ}\ \gamma = \frac{\lambda_s}{\ell} = \frac{\ell \tan\phi}{\ell} = \tan\phi \qquad [\gamma \ldots \text{ガンマ}]$$

ここで，ϕ<<1 のとき

$$\tan\phi \approx \phi$$

の近似が成り立つので

$$\text{せん断ひずみ}\ \gamma = \frac{\lambda_s}{\ell} = \tan\phi = \phi\ [\mathrm{rad}]$$

となる。

※このとき角度がラジアンであることに注意すること。

◯コラム：三角関数の近似について

$\theta \ll 1$のとき

$$\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$$

が成り立つ。

これは各関数のグラフを考えれば一目瞭然である。図 4.4 の左図にあるとおりグラフを見れば，0 の近傍で $\tan\theta$，θ，$\sin\theta$が重なることは明らかであろう。$\theta \ll 1$という条件が具体的にどのくらいの角度まで成立するかを知るには，実際にグラフを描いてみるとわかりやすい。高校の数学の教科書の巻末に掲載されている三角関数表を元に各値を方眼紙にプロットしグラフを描いてみることをおすすめする（一生のうち，一度はやっておいた方が良い例題である）。

図形的に考えると，θは単位円上の円弧の弧長に，$\tan\theta$，$\sin\theta$は円弧の端を頂点とする直角三角形の辺の長さに相当する（図 4.4 の右図）。これらの長さが微小角度でほぼ一致するということが直観的なイメージになる。またテイラー展開の初項が一致することも直観的な理解の助けになるであろう。

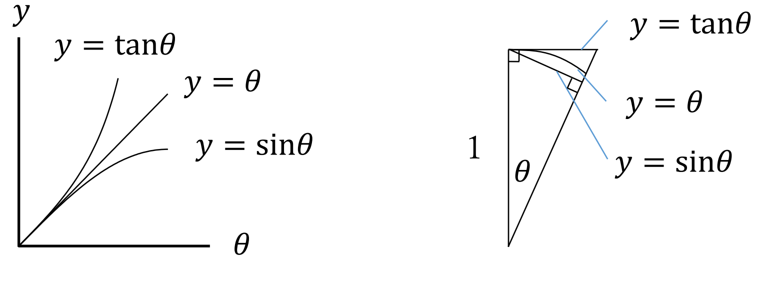


図 4.4. 三角関数の近似

この近似は工学上の最も重要な近似である。微小角度でこの近似が成立することを利用し解析的に解を求めることができることが多々あり，たとえば単振り子の周期は$\sin\theta \approx \theta$の近似から求めることできる。