前期 火曜日１限 ３年次 ロボット家電と制御
担当：ホームエレクトロニクス開発学科　山崎

※興味がある人のための自習資料です。授業配布資料とあわせて利用してください。

２次遅れ要素の単位ステップ応答に関する各種導出

１．２次遅れ要素の単位ステップ応答の各条件

２次遅れ要素の単位ステップ応答は

$$y(s) = G(s)\cdot u(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$= K\left(\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}\right) \qquad \cdots(1)$$

となる。これをラプラス逆変換することを考えるとき，式の分母部分の二次関数，すなわち

$$s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2 = 0$$

がどのような解を持つかによって，下記の３通りに場合分けして逆変換する必要がある。

(i)　$s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2 = 0$が 解をもたないとき

→　$\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2} = \frac{○}{(s+□)^2+◎^2}$

の形に変形し，三角関数のラプラス変換式を用いて逆変換する。

(ii)　$s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2 = 0$が 解を１つもつとき（重解）

→　$\frac{K{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2} = \frac{○}{(s+□)^2}$

の形に変形し，tのラプラス変換式に推移則を用いた形にして逆変換する。

(iii)　$s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2 = 0$ 解を２つもつとき

→　２つの解α，βを用いて

$$\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2} = \frac{○}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

の形に変形し，部分分数分解した後に逆変換する。

この３つの場合分けの各条件は，

$$s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2=0$$

の判別式$D\,/\,4$から次のように求めることができる。

$$\frac{D}{4}=(\zeta\omega_n)^2-{\omega_n}^2={\omega_n}^2(\zeta^2-1)$$

ここで${\omega_n}^2>0$より

$$D'\,/\,4\;=\;\zeta^2-1$$

の正負で場合分けすればよい。$\zeta\geq 0$も考慮して，以下のとおりになる。

(i)　$\zeta^2-1<0$ すなわち $0\leq\zeta<1$ のとき　解なし

(ii)　$\zeta^2-1=0$ すなわち $\zeta=1$ のとき　解を１つもつ（重解）

(iii)　$\zeta^2-1>0$ すなわち $1<\zeta$のとき　解を２つもつ

(i) $0\leq\zeta<1$ のときで特に$0<\zeta<1$ のときには減衰振動，(ii) $\zeta=1$ のときに臨界減衰，(iii) $1<\zeta$のときに加減衰となるのは，配布資料でも示したとおりである。

以下では，各条件での解の導出の仕方を示す。

２．２次遅れ要素の単位ステップ応答の導出

(i)　$0\leq\zeta<1$ のとき

$$y(s)=K\left(\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}\right)\qquad\cdots(1)[再掲]$$

前述のとおり，式の後半部分を $\frac{○}{(s+□)^2+◎^2}$ の形を目指して変形すると，

$$\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}=\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+(\zeta\omega_n)^2+{\omega_n}^2-(\zeta\omega_n)^2}$$

$$=\frac{s+2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+{\omega_n}^2-(\zeta\omega_n)^2}$$

$$=\frac{s+\zeta\omega_n+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(1-\zeta^2){\omega_n}^2}$$

$$=\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(1-\zeta^2){\omega_n}^2}+\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(1-\zeta^2){\omega_n}^2}\cdot\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

となる。これは，sin 関数と cos 関数のラプラス変換式を用いることができるように係数

をあわせた結果である。よって(1)式より，

$$y(s) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}\right)$$

$$= K\left[\left(\frac{1}{s} - \left\{\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2){\omega_n}^2} + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2){\omega_n}^2} \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right\}\right)\right]$$

となる。ラプラス変換逆変換すると，

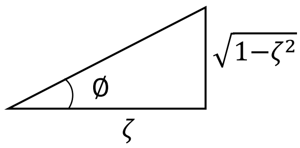
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\ y(s)\ ] = K\left\{1 - \left(e^{-\zeta\omega_n t}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\cos e^{-\zeta\omega_n t}\right)\right\}$$

$$= K\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos e^{-\zeta\omega_n t}\right)\right\}$$

これを三角関数の合成を用いて整理すると，

$$= K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos e^{-\zeta\omega_n t}\right)\right\}$$

$$= K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left\{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \emptyset\right)\right\}\right],$$



ただし$\tan\emptyset = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$（右図参照）

図１ 三角関数の合成

となる。これを$q = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$（減衰自由各周波数)で置き換えて，配布資料で示した下式を得る。

$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(qt + \emptyset)\right\}\quad ,$$

$$q = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n\text{（減衰自由各周波数）},\qquad \emptyset = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

この式は右の図２のように０＝ζ のときには持続振動を示し，0< ζ <1 のときには減衰振動を示す。

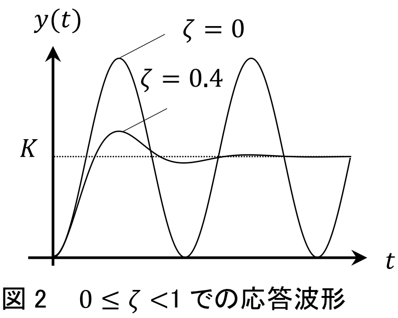


図２　0 ≤ ζ <1 での応答波形

(ii)　 ζ =1 のとき

$$y(s) = \frac{K\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2} \cdot \frac{1}{s} \qquad \cdots(1)\ [再掲]$$

$\zeta = 1$を代入し，前述のとおり $\frac{\bigcirc}{(s+\square)^2}$ の形を目指して変形すると，

$$y(s) = \frac{K\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K\omega_n{}^2}{(s+\omega_n)^2} \cdot \frac{1}{s}$$

となる。これを部分分数分解して

$$= K\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right\}$$

となる。これをラプラス逆変換して，

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\ y(s)\ ] = K(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t})$$

$$= K\{1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)\}$$

を得る。

　この式は右の図３のように，振動せずに減衰しゲイン定数 K に収束する。この応答を臨界減衰とよぶ。

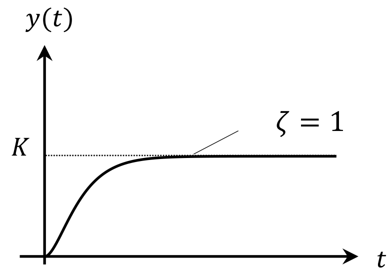


図３　ζ = １での応答波形

(iii)　 $1 < \zeta$のとき

$$y(s) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2}\right) \qquad \cdots(1)[再掲]$$

　前述のとおり，式の後半部分を２つの解 α，β を用い $\frac{\bigcirc}{(s+\alpha)(s+\beta)}$ の形に変形することを目指す。ここでは，まず

$$\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2}$$

　を部分分数分解する方法を示すこととする。

　$1 < \zeta$ のとき，$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2 = 0$ は２つの解を持つ。この２解は解の公式より

$$s=-\zeta\omega_n\pm\sqrt{(\zeta\omega_n)^2-{\omega_n}^2}=-\left(\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n$$

となるので，$s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2$は

$$s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2=\left\{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right\}\left\{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right\}$$

と変形できる。これを利用すれば，

$$\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}=\frac{a}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}+\frac{b}{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

と部分分数分解することができる。このときの係数 a，b は次のように導出する。

上式の右辺を通分して整理すると，

$$\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}=\frac{(a+b)s+(a+b)\zeta\omega_n+(a-b)\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n}{\left\{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right\}\left\{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right\}}$$

となる。両辺の分母は等しいので，分子同士を比較すると下記の連立方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)\zeta\omega_n+(a-b)\sqrt{\zeta^2-1}\omega_n=2\zeta\omega_n \end{cases}$$

この２式に関して，下の式を両辺$\div\omega_n$し，上の式を用いて b を消去すると，

$$\begin{cases} b=1-a \\ \zeta+(2a-1)\sqrt{\zeta^2-1}=2\zeta \end{cases}$$

となる。この下の式から aを求めるには ζ を左辺にまとめて，

$$(2a-1)=\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}$$

これを a について解くと，

$$a=\frac{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}}$$

となる。これを用いて b も求めると,

$$\begin{cases} a = \dfrac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ \\ b = \dfrac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{cases}$$

となる。以上を用いると(1)式は,

$$y(s) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}\right)$$

$$= K\left\{\frac{1}{s} - \left(\frac{\dfrac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}}{s + \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n} + \frac{\dfrac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}}{s + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n}\right)\right\}$$

$$= K\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left\{\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n} + \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n}\right\}\right]$$

となる。これをラプラス逆変換して,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\, y(s)\,]$$

$$= K\left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left\{\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} + \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t}\right\}\right]$$

$$= K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left\{\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)e^{\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} + \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t}\right\}\right]$$

$$= K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left\{\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)e^{\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} - \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t}\right\}\right]$$

$$= K\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}e^{\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} - \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t}\right)\right\}$$

ここで $q' = \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n$ として,

$$y(t) = K\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}e^{q' t} - \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}e^{-q' t}\right)\right\}$$

を得る。

３．減衰振動における応答波形のパラメータと伝達関数の関係

$0<\zeta<1$ の減衰振動では，最大行き過ぎ時間 T_{max} は応答の中ではじめて $\frac{dy(t)}{dt}=0$ となるときである。減衰振動の応答は，

$$y(t)=K\left\{1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(qt+\emptyset)\right\}\quad,$$

$$q=\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n\text{（減衰自由各周波数）},\qquad \emptyset=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

より，

$$\frac{dy(t)}{dt}=\frac{-K}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{d}{dt}\left\{e^{-\zeta\omega_n t}\sin(qt+\emptyset)\right\}$$

$$=\frac{-K}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left\{-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\sin(qt+\emptyset)+e^{-\zeta\omega_n t}q\cos(qt+\emptyset)\right\}$$

$$=\frac{Ke^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\{\zeta\omega_n\sin(qt+\emptyset)-q\cos(qt+\emptyset)\}$$

一部の係数部分に $q=\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ を代入して整理して，

$$=\frac{K\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left\{\zeta\sin(qt+\emptyset)-\sqrt{1-\zeta^2}\cos(qt+\emptyset)\right\}$$

これを三角関数の合成を用いて整理すると，

$$=\frac{K\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(qt+\emptyset-\emptyset)$$

$$=\frac{K\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin qt$$

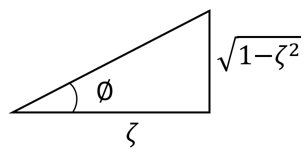


図１ 三角関数の合成（再掲）

となる。この式から，$t>0$ ではじめて，$\frac{dy(t)}{dt}=0$ となるのは，

$$\sin qt=0\quad\text{すなわち}\quad qt=\pi$$

のときとわかる。ゆえに

$$qT_{max}=\pi$$

$$\therefore\quad T_{max}=\frac{\pi}{q}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$$

を得る。

　このとき，

$$y_{max}=y(T_{max})=K\left\{1-\frac{e^{-\zeta\omega_n T_{max}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(qT_{max}+\emptyset)\right\}$$

$qT_{max} = \pi$を代入して

$$= K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n T_{max}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\pi + \emptyset)\right\}$$

$\sin(\pi + \emptyset) = -\sin\emptyset$より

$$= K\left\{1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n T_{max}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\emptyset\right\}$$

これを$\sin\emptyset = \sqrt{1-\zeta^2}$（図１より）を用いて整理し，

$$y_{max} = K(1 + e^{-\zeta\omega_n T_{max}})$$

を得る。

以上から，

$$T_{max} = \frac{\pi}{q} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \qquad \cdots(2)$$

$$y_{max} = K(1 + e^{-\zeta\omega_n T_{max}}) \qquad \cdots(3)$$

が得られた。

続いて，この T_{max}とy_{max}を用いて，伝達関数のパラメータである固有角周波数ω_n，減衰係数比 ζを導出する。

まず(3)式から減衰係数比ζを導く。(3)式より

$$\frac{y_{max}}{K} - 1 = e^{-\zeta\omega_n T_{max}}$$

左辺を通分して

$$\frac{y_{max} - K}{K} = e^{-\zeta\omega_n T_{max}}$$

両辺自然対数をとって

$$\ln\frac{y_{max} - K}{K} = -\zeta\omega_n T_{max}$$

となる。これをζについて解き，

$$\zeta = -\frac{1}{\omega_n T_{max}}\ln\frac{y_{max} - K}{K} = \frac{1}{\omega_n T_{max}}\ln\frac{K}{y_{max} - K}$$

を得る。

次に固有角周波数ω_nを求める。(2)式に，いま得た ζ を代入して

$$T_{max} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\omega_n T_{max}}\ln\frac{K}{y_{max} - K}\right)^2}\ \omega_n}$$

$$\therefore \quad \sqrt{{\omega_n}^2 - \left(\frac{1}{T_{max}} \ln \frac{K}{y_{max} - K}\right)^2} = \frac{\pi}{T_{max}}$$

両辺２乗して

$${\omega_n}^2 - \left(\frac{1}{T_{max}} \ln \frac{K}{y_{max} - K}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{T_{max}}\right)^2$$

これをω_nについて解くと

$${\omega_n}^2 = \left(\frac{1}{T_{max}} \ln \frac{K}{y_{max} - K}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{T_{max}}\right)^2$$

$$\therefore \quad \omega_n = \sqrt{\left(\frac{1}{T_{max}} \ln \frac{K}{y_{max} - K}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{T_{max}}\right)^2}$$

を得る。