

※興味がある人のための補足資料です。[授業動画・配布資料](#)とあわせて利用してください。

## 2次遅れ要素の単位ステップ応答に関する各種導出

### 1. 2次遅れ要素の単位ステップ応答の各条件

2次遅れ要素の単位ステップ応答は

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \cdot U(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \\ &= K \left( \frac{1}{s} - \frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \right) \end{aligned} \quad \dots(1)$$

となる。これをラプラス逆変換することを考えるとき、式の分母部分の二次関数、すなわち

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

がどのような解を持つかによって、下記の3通りに場合分けして逆変換する必要がある。

(i)  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ が解をもたないとき

$$\rightarrow \frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{\bigcirc}{(s+\square)^2+\bigodot^2}$$

の形に変形し、三角関数のラプラス変換式を用いて逆変換する。

(ii)  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ が解を1つもつとき (重解)

$$\rightarrow \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{\bigcirc}{(s+\square)^2}$$

の形に変形し、 $t$ のラプラス変換式に推移則を用いた形にして逆変換する。

(iii)  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$  解を2つもつとき

→ 2つの解  $\alpha$ ,  $\beta$  を用いて

$$\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{\bigcirc}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

の形に変形し、部分分数分解した後に逆変換する。

この3つの場合分けの各条件は、

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

の判別式 $D/4$ から次のように求めることができる。

$$\frac{D}{4} = (\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2 = \omega_n^2(\zeta^2 - 1)$$

ここで $\omega_n^2 > 0$ より

$$D'/4 = \zeta^2 - 1$$

の正負で場合分けすればよい。 $\zeta \geq 0$ も考慮して、以下のとおりになる。

- (i)  $\zeta^2 - 1 < 0$  すなわち  $0 \leq \zeta < 1$  のとき 解なし
- (ii)  $\zeta^2 - 1 = 0$  すなわち  $\zeta = 1$  のとき 解を1つもつ (重解)
- (iii)  $\zeta^2 - 1 > 0$  すなわち  $1 < \zeta$  のとき 解を2つもつ

- (i)  $0 \leq \zeta < 1$  のときで特に $0 < \zeta < 1$  のときには減衰振動、(ii)  $\zeta = 1$  のときに臨界減衰、(iii)  $1 < \zeta$  のときに加減衰となるのは、配布資料でも示したとおりである。

以下では、各条件での解の導出の仕方を示す。

## 2. 2次遅れ要素の単位ステップ応答の導出

- (i)  $0 \leq \zeta < 1$  のとき

$$Y(s) = K \left( \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \quad \dots(1)[再掲]$$

前述のとおり、式の後半部分を  $\frac{\circ}{(s+\square)^2 + \ominus}$  の形を目指して変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} &= \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + (\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2 - (\zeta\omega_n)^2} \\ &= \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2 - (\zeta\omega_n)^2} \\ &= \frac{s + \zeta\omega_n + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_n^2} \\ &= \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_n^2} + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_n^2} \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \end{aligned}$$

となる。これは、sin 関数と cos 関数のラプラス変換式を用いることができるように係数

をあわせた結果である。よって(1)式より、

$$Y(s) = K \left( \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right)$$

$$= K \left[ \left( \frac{1}{s} - \left\{ \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2} + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2} \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right\} \right) \right]$$

となる。ラプラス変換逆変換すると、

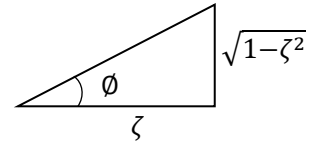
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = K \left\{ 1 - \left( e^{-\zeta\omega_n t} \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos e^{-\zeta\omega_n t} \right) \right\}$$

$$= K \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos e^{-\zeta\omega_n t} \right) \right\}$$

これを三角関数の合成を用いて整理すると、

$$= K \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left( \sqrt{1-\zeta^2} \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos e^{-\zeta\omega_n t} \right) \right\}$$

$$= K \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left\{ \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi) \right\} \right],$$



ただし  $\tan \phi = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$  (右図参照) 図1 三角関数の合成

となる。これを  $q = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$  (減衰自由各周波数) で置き換えて、配布資料で示した下式を得る。

$$y(t) = K \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(qt + \phi) \right\},$$

$$q = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \text{ (減衰自由各周波数)}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

この式は右の図2のように  $0 = \zeta$  のときには持続振動を示し、 $0 < \zeta < 1$  のときには減衰振動を示す。

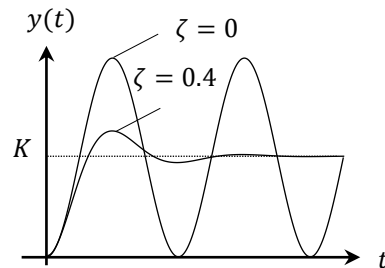


図2  $0 \leq \zeta < 1$  での応答波形

(ii)  $\zeta = 1$  のとき

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \quad \dots(1) \text{ [再掲]}$$

$\zeta = 1$  を代入し、前述のとおり  $\frac{\circ}{(s+\square)^2}$  の形を目指して変形すると、

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \cdot \frac{1}{s}$$

となる。これを部分分数分解して

$$= K \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \right\}$$

となる。これをラプラス逆変換して、

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = K(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}) \\ &= K\{1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)\} \end{aligned}$$

を得る。

この式は右の図3のように、振動せずに減衰しゲイン定数  $K$  に収束する。この応答を臨界減衰とよぶ。

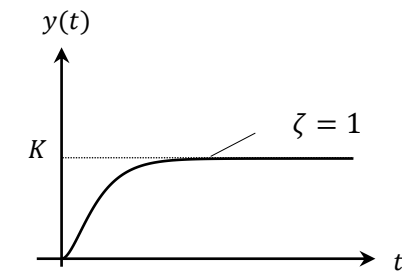


図3  $\zeta = 1$  での応答波形

(iii)  $1 < \zeta$  のとき

$$Y(s) = K \left( \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \quad \dots(1) \text{ [再掲]}$$

前述のとおり、式の後半部分を2つの解  $\alpha$ ,  $\beta$  を用い  $\frac{\circ}{(s+\alpha)(s+\beta)}$  の形に変形することを目指す。ここでは、まず

$$\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

を部分分数分解する方法を示すこととする。

$1 < \zeta$  のとき、 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$  は2つの解を持つ。この2解は解の公式より

$$s = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = -(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

となるので、 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ は

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = \{s + (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n\} \{s + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n\}$$

と変形できる。これを利用すれば、

$$\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{a}{s + (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n} + \frac{b}{s + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n}$$

と部分分数分解することができる。このときの係数  $a$ ,  $b$  は次のように導出する。

上式の右辺を通分して整理すると、

$$\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{(a+b)s + (a+b)\zeta\omega_n + (a-b)\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n}{\{s + (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n\} \{s + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n\}}$$

となる。両辺の分母は等しいので、分子同士を比較すると下記の連立方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ (a+b)\zeta\omega_n + (a-b)\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n = 2\zeta\omega_n \end{cases}$$

この2式に関して、下の式を両辺 $\div\omega_n$ し、上の式を用いて  $b$  を消去すると、

$$\begin{cases} b = 1 - a \\ \zeta + (2a - 1)\sqrt{\zeta^2 - 1} = 2\zeta \end{cases}$$

となる。この下の式から  $a$ を求めるには  $\zeta$  を左辺にまとめて、

$$(2a - 1) = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

これを  $a$  について解くと、

$$a = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

となる。これを用いて  $b$  も求めると、

$$\begin{cases} a = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ b = \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{cases}$$

となる。以上を用いると(1)式は、

$$\begin{aligned} Y(s) &= K \left( \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \\ &= K \left\{ \frac{1}{s} - \left( \frac{\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}}{s + (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n} + \frac{\frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}}{s + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n} \right) \right\} \\ &= K \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n} + \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n} \right\} \right] \end{aligned}$$

となる。これをラプラス逆変換して、

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \\ &= K \left[ 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \right\} \right] \\ &= K \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} + (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} \right\} \right] \\ &= K \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} \right\} \right] \\ &= K \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} - \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} \right) \right\} \end{aligned}$$

ここで  $q' = \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n$  として、

$$y(t) = K \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{q't} - \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-q't} \right) \right\}$$

を得る。

3. 減衰振動における応答波形のパラメータと伝達関数の関係

$0 < \zeta < 1$  の減衰振動では、最大行き過ぎ時間  $T_{max}$  は応答の中ではじめて  $\frac{dy(t)}{dt} = 0$  となる  
 ときである。減衰振動の応答は、

$$y(t) = K \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(qt + \phi) \right\} ,$$

$$q = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \text{ (減衰自由各周波数)} , \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{-K}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{d}{dt} \{ e^{-\zeta\omega_n t} \sin(qt + \phi) \} \\ &= \frac{-K}{\sqrt{1-\zeta^2}} \{ -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \sin(qt + \phi) + e^{-\zeta\omega_n t} q \cos(qt + \phi) \} \\ &= \frac{K e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \{ \zeta\omega_n \sin(qt + \phi) - q \cos(qt + \phi) \} \end{aligned}$$

一部の係数部分に  $q = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$  を代入して整理して、

$$= \frac{K\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \{ \zeta \sin(qt + \phi) - \sqrt{1-\zeta^2} \cos(qt + \phi) \}$$

これを三角関数の合成を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} &= \frac{K\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(qt + \phi - \phi) \\ &= \frac{K\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin qt \end{aligned}$$

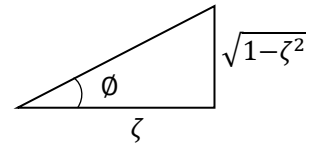


図1 三角関数の合成(再掲)

となる。この式から、 $t > 0$  ではじめて、 $\frac{dy(t)}{dt} = 0$  となるのは、

$$\sin qt = 0 \quad \text{すなわち} \quad qt = \pi$$

のときとわかる。ゆえに

$$qT_{max} = \pi$$

$$\therefore T_{max} = \frac{\pi}{q} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$$

を得る。

このとき、

$$y_{max} = y(T_{max}) = K \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n T_{max}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(qT_{max} + \phi) \right\}$$

$qT_{max} = \pi$ を代入して

$$= K \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n T_{max}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi + \phi) \right\}$$

$\sin(\pi + \phi) = -\sin \phi$ より

$$= K \left\{ 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n T_{max}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \phi \right\}$$

これを $\sin \phi = \sqrt{1-\zeta^2}$  (図1より) を用いて整理し、

$$y_{max} = K(1 + e^{-\zeta\omega_n T_{max}})$$

を得る。

以上から、

$$T_{max} = \frac{\pi}{q} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \quad \dots(2)$$

$$y_{max} = K(1 + e^{-\zeta\omega_n T_{max}}) \quad \dots(3)$$

が得られた。

続いて、この  $T_{max}$  と  $y_{max}$  を用いて、伝達関数のパラメータである固有角周波数  $\omega_n$ 、減衰係数比  $\zeta$  を導出する。

まず(3)式から減衰係数比  $\zeta$  を導く。(3)式より

$$\frac{y_{max}}{K} - 1 = e^{-\zeta\omega_n T_{max}}$$

左辺を通分して

$$\frac{y_{max} - K}{K} = e^{-\zeta\omega_n T_{max}}$$

両辺自然対数をとって

$$\ln \frac{y_{max} - K}{K} = -\zeta\omega_n T_{max}$$

となる。これを  $\zeta$  について解き、

$$\zeta = -\frac{1}{\omega_n T_{max}} \ln \frac{y_{max} - K}{K} = \frac{1}{\omega_n T_{max}} \ln \frac{K}{y_{max} - K}$$

を得る。

次に固有角周波数  $\omega_n$  を求める。(2)式に、いま得た  $\zeta$  を代入して

$$\begin{aligned} T_{max} &= \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1 - \left( \frac{1}{\omega_n T_{max}} \ln \frac{K}{y_{max} - K} \right)^2} \omega_n} \end{aligned}$$



$$\therefore \sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{1}{T_{max}} \ln \frac{K}{y_{max}-K}\right)^2} = \frac{\pi}{T_{max}}$$

両辺2乗して

$$\omega_n^2 - \left(\frac{1}{T_{max}} \ln \frac{K}{y_{max}-K}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{T_{max}}\right)^2$$

これを $\omega_n$ について解くと

$$\omega_n^2 = \left(\frac{1}{T_{max}} \ln \frac{K}{y_{max}-K}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{T_{max}}\right)^2$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\left(\frac{1}{T_{max}} \ln \frac{K}{y_{max}-K}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{T_{max}}\right)^2}$$

を得る。